Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Институт естественных наук
и математики

# МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

## Подготовка к вступительным экзаменам в магистратуру

Задачник

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

# МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

## Подготовка к вступительным экзаменам в магистратуру

### Задачник

Рекомендовано методическим советом Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
09.03.03 «Прикладная информатика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2018

УДК 5(076.1) + 004(076.1)
М34

Авторы:
Д. С. Ананичев, В. В. Арестов, М. О. Асанов,
А. Л. Гальперин, П. Ю. Глазырина, К. Н. Гурьянова,
А. О. Иванов, А. Ю. Коврижных, О. О. Коврижных,
Ю. А. Меленцова, С. П. Охезин, М. А. Рекант, Т. К. Стихина,
А. Е. Шнейдер, А. М. Шур

Под общей редакцией
*А. Ю. Коврижных*

Рецензенты:
отдел прикладных проблем управления Института
математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
(зам. директора ИММ УрО РАН,
старший научный сотрудник отдела,
кандидат физико-математических наук *И. Н. Кандоба*);
*Г. Б. Захарова*, кандидат технических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник, профессор кафедры
прикладной математики и технической графики
Уральского государственного архитектурно-художественного
университета

М34 Математика, механика и компьютерные науки : Подготовка к вступительным экзаменам в магистратуру : задачник / [Д. С. Ананичев и др. ; под общ. ред. А. Ю. Коврижных] ; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 140 с.

ISBN 978-5-7996-2456-9

Даются задачи вступительных экзаменов в магистратуру департамента математики, механики и компьютерных наук с 2011 по 2015 г. Часть задач снабжена решениями. Приводятся перечень вопросов и рекомендуемая литература для подготовки к экзаменам.

Для студентов, обучающихся по укрупненным группам направлений 010000 «Математика и механика», 020000 «Компьютерные и информационные науки», 090000 «Информатика и вычислительная техника».

УДК 5(076.1) + 004(076.1)

ISBN 978-5-7996-2456-9 

# Оглавление

# От авторов

Цель данного задачника — оказать помощь абитуриентам – выпускникам балакавриата в подготовке к поступлению в магистратуру Института естественных наук и математики Уральского федерального университета. Представлены задачи, которые предлагались на вступительных экзаменах в магистратуру департамента математики, механики и компьютерных наук в 2011—2015 гг. Часть задач снабжена решениями. Приводятся перечень вопросов и рекомендуемая литература для подготовки к экзаменам.

По объему и содержанию программа вступительных испытаний в магистратуру соответствует программе государственной итоговой аттестации бакалавров.

Для направлений 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 09.04.03 «Прикладная информатика», 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» вступительное испытание проводится в виде письменного экзамена и содержит две части: общую и специальную. На выполнение каждой части отводится два часа. В общую часть входят пять задач: одна по алгебре и геометрии (разделы программы A и $\mathrm{A_c}$), две по математическому анализу (B, $\mathrm{B_c}$), одна по дифференциальным уравнениям и одна по теории вероятностей (разделы D, $\mathrm{D_c}$ и G, $\mathrm{G_c}$ соответственно). Задач по теоретической механике математикам не предлагалось, хотя этот раздел входит в программу.

Специальная часть по направлению 01.04.01 «Математика» содержит пять задач — по одной из разделов: «Алгебра», «Математический анализ», «Теория функций комплексного переменного» (раздел программы C), «Методы вычислений» (раздел F) и «Математическая физика» (раздел E). Специальная часть экзамена по другим направлениям подготовки содержит две задачи из дискретной математики, математической логики и теории автоматов (раздел $\mathrm{J_c}$), две задачи из раздела «Графы и комбинаторные алгоритмы» ($\mathrm{K_c}$), одну из раздела «Основы баз данных» ($\mathrm{L_c}$).

Задачи общей части помечены сокращением ОЧ, задачи специальной части — СЧ.

На вступительном экзамене в магистратуру по направлению 01.04.03 «Механика и математическое моделирование» предлагается ответить на два вопроса и решить две задачи. Программа экзамена содержит следующие разделы: «Теоретическая механика» ($\mathrm{T_m}$), «Механика сплошной среды» ($\mathrm{M_m}$), «Теория устойчивости» ($\mathrm{S_m}$), «Дифференциальные уравнения» ($\mathrm{D_m}$), «Алгебра и математический анализ» ($\mathrm{AB_m}$).

# Программы вступительных испытаний

## Направление 01.04.01 «Математика»

### (A) Алгебра

1. Определители $N$-го порядка. Свойства определителей. Разложение определителя по минорам.

2. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов. Базис и размерность пространства. Размерность суммы пространств. Прямая сумма, разложение линейного пространства в прямую сумму одномерных подпространств.

3. Матрицы и действия с ними. Теорема о ранге матрицы. Определитель произведения матриц. Обратная матрица.

4. Системы линейных уравнений. Теорема Крамера. Критерий совместности и строение общего решения совместной системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений.

5. Линейные отображения. Матрица линейного оператора в базисе. Ядро и образ линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Корневое разложение. Жорданов базис. Жорданова форма матрицы линейного оператора.

6. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации, ортонормированный базис. Разложение пространства в прямую сумму пространства и его ортогонального дополнения.

7. Общая алгебра. Основные алгебраические системы: полугруппы и группы, кольца и поля, решетки. Гомоморфизмы и конгруэнции.

Литература


- Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1959.
- Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1975.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. — М. : Наука, 1977.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984.
- Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М. : Наука, 1976.


## (B) Математический анализ

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Дифференцируемые функции. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ролля, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя. Формула Тейлора. Локальный экстремум.

2. Определенный интеграл Римана по отрезку. Интегрируемость непрерывных функций. Первообразная непрерывной функции. Формула Ньютона — Лейбница.

3. Функции многих переменных. Компактные подмножества евклидова пространства; лемма Бореля о покрытиях. Функции, непрерывные на компакте. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточное условие дифференцируемости. Производная функции по направлению, градиент. Формула Тейлора. Локальный экстремум. Неявные функции; существование,

непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Условный локальный экстремум.

4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный, Дирихле – Абеля). Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

6. Степенные ряды на действительной прямой и в комплексной плоскости. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда; ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

7. Несобственные интегралы. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

8. Кратные интегралы. Сведение к повторным. Замена переменных в кратных интегралах.

9. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского.

10. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Поточечная и равномерная сходимости рядов Фурье. Среднеквадратическая сходимость рядов Фурье; равенство Парсеваля.

11. Метрическое пространство. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.

12. Гильбертово пространство. Общий вид линейного функционала; сопряженное пространство.

Литература


- Ильин В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М. : Изд-во МГУ, 2004–2006 (а также все издания с 1979 г.).
- Никольский С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000–2001.
- Никольский С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1990–1991.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высш. шк., 1988–1999 (а также все издания с 1981 г.).
- Бесов О. В. Лекции по математическому анализу / О. В. Бесов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- Лекции С. Б. Стечкина по математическому анализу : в 2 т. / под ред. Т. В. Радославовой, Н. Н. Холщевниковой. — М. : Изд-во попечительского совета механико-математического фак. МГУ. — Т. 1. 2011 ; Т. 2. 2014.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ : Лаборатория Знаний, 2003 (а также все издания с 1968 г.).


## (C) Теория функций комплексного переменного

1. Функции комплексного переменного. Дифференцируемость в точке, условия Коши – Римана.
2. Элементарные функции. Основные свойства. Отображения, осуществляемые элементарными функциями.
3. Интеграл по (спрямляемой) кривой. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру от аналитической функции. Интеграл Коши.

4. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Вычеты, теорема Коши о вычетах, теорема Коши о полной сумме вычетов.

Литература


- Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич — М. : Наука, 2006.
- Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : учеб. [для вузов] / А. И. Маркушевич. — 3-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2009. — Т. 1 : Начала теории ; Т. 2 : Дальнейшее построение теории.
- Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1989.
- Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — 4-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004, 2006.


### (D) Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Теорема о существовании и единственности решения.

2. Линейные дифференциальные уравнения $N$-го порядка. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения. Линейное неоднородное уравнение, метод вариации производных постоянных. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение, случай простых, кратных, комплексных корней. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

3. Системы дифференциальных уравнений. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений, фундаментальная система решений. Формула Остроградского – Лиувилля. Неоднородные системы линейных уравнений, метод вариации произвольных постоянных. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, случай простых корней.

Литература


- Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — 4-е изд. — М. : Наука, 1974.
- Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Изд-во МГУ, 1984.
- Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений : учеб. для гос. ун-тов / В. В. Степанов. — 7-е изд., стер. — М. : Физматгиз, 1958.
- Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учеб. для физ. спец. ун-тов / Л. Э. Эльсгольц ; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. — 2-е изд., стер. — М. : Наука, 1969.

## (E) Уравнения математической физики

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

2. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности. Понятие о начально-краевой задаче. Виды граничных условий.

3. Общая схема метода Фурье (разделения переменных) на примере волнового уравнения с формулировкой основных свойств задачи Штурма – Лиувилля.

4. Уравнения Лапласа: решение внутренней и внешней задачи Дирихле для круга.

Литература

- Искакова Л. Ю. Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов / Л. Ю. Искакова, В. П. Федотов. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2006.

- Будак Б. М. Сборник задач по математической физике : учеб. пособие для ун-тов / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — 3-е изд., стер. — М. : Наука, 1980.

## (F) Методы вычислений

1. Решение нелинейных уравнений. Отделение корня. Уточнение корня методом деления отрезка пополам, хорд, касательных, простой итерации. Достаточные условия сходимости методов.

2. Системы линейных алгебраических уравнений. Норма матрицы и вектора. Число обусловленности. Итерационные методы решения систем. Необходимые и достаточные условия сходимости метода простой итерации. Метод Якоби, метод Гаусса – Зейделя.

3. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа, в форме Ньютона. Оценка погрешности.

4. Построение интерполяционных квадратурных формул для интегралов с весом. Оценка погрешности.

5. Решение переопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов.

Литература


- Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 2-е изд. — М. : СПб. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

- Вержбицкий В. М. Основы численных методов : учеб. для вузов / В. М. Вержбицкий. — 2-е изд., перераб. — М. : Высш. шк., 2005.

- Самарский А. А. Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1982.

- Самарский А. А. Задачи и упражнения по численным методам : [учеб. пособие] / А. А. Самарский, П. Н. Вабищев, Е. А. Самарская. — 2-е изд., испр. — М. : Едиториал УРСС, 2003.


## (G) Теория вероятностей

1. Вероятностные пространства: аксиоматика Колмогорова. Условная вероятность. Независимые события. Формулы полной вероятности и Байеса. Схемы независимых испытаний Бернулли, предельные теоремы в схеме Бернулли.

2. Случайные величины. Распределения случайных величин; дискретное распределение, абсолютно непрерывное распределение. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание,

дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства. Классические распределения: Бернулли, биномиальное, Пуассона, равномерное, нормальное и показательное.

3. Закон больших чисел; теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема.

Литература


- Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики / В. А. Севастьянов. — М. : Наука, 1982.
- Боровков А. А. Курс теории вероятностей / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1986.
- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988.
- Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В. Н. Тутубалин. — М. : Изд-во МГУ, 1992.
- Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. — М. : Наука, 1989.

## (H) Теоретическая механика

1. Уравнения Лагранжа второго рода.

2. Канонические уравнения Гамильтона.

3. Основные теоремы динамики: теорема об изменении количества движения, теорема об изменении момента количества движения, теорема об изменении кинетической энергии. Первые интегралы теорем.

Литература


- Аппель П. Теоретическая механика : в 2 т. / П. Аппель. — М. : Физматгиз, 1960.

- Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : учеб. пособие / Н. Н. Бухгольц. — 10-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2009.

- Лойцянский Л. Г. Теоретическая механика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М. : Наука, 1982.

**Направления**
**02.04.01 «Математика и компьютерные науки»**
**02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»**
**09.04.03 «Прикладная информатика»**

### Разделы программы

## ($\mathbf{A_c}$) Алгебра и геометрия

1. Матрицы и действия с ними. Определители, их свойства. Критерий обратимости матрицы. Теорема Крамера.

2. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Линейная оболочка системы векторов. Подпространства. Базис и размерность. Замена базиса. Сумма и пересечение подпространств. Ранг матрицы, теорема о ранге. Элементарные преобразования матриц.

3. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Критерий совместности СЛУ и строение общего решения совместной СЛУ.

4. Линейные отображения. Матрица линейного оператора в базисе. Ядро и образ линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Корневое разложение. Жорданов базис. Жорданова форма матрицы линейного оператора.

5. Евклидовы пространства. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис. Самосопряженные (симметрические) операторы и их свойства.

6. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к главным осям. Преобразование уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Литература


- Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1959.
- Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1975.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. — М. : Наука, 1977.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984.
- Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М. : Наука, 1976.


## $(\mathbf{B_c})$ Математический анализ

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Дифференцируемые функции и их свойства. Правила Лопиталя. Формула Тейлора. Локальный экстремум.

2. Определенный интеграл Римана по отрезку. Интегрируемость непрерывных функций. Первообразная непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница.

3. Функции многих переменных. Функции, непрерывные на компакте. Равномерная непрерывность. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Локальный экстремум. Неявные функции; существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Условный локальный экстремум.

4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость.

5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

6. Степенные ряды на действительной прямой и в комплексной плоскости. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда; ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

7. Несобственные интегралы. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов.

8. Кратные интегралы. Сведение к повторным. Замена переменных в кратных интегралах.

9. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Гаусса – Остроградского.

10. Ряды Фурье по тригонометрической системе.

Литература


- Ильин В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М. : Изд-во МГУ, 2004–2006 (а также все издания с 1979 г.).

- Никольский С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1990–1991.

- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высш. шк., 1988–1999 (а также все издания с 1981 г.).

- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ : Лаборатория Знаний, 2003 (а также все издания с 1968 г.).

## ($\mathbf{D_c}$) Дифференциальные уравнения

1. Задача Коши для уравнений $n$-го порядка и систем. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (доказательство для уравнений первого порядка).

2. Решение уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, линейных, Бернулли, в полных дифференциалах.

3. Решение линейных уравнений $n$-го порядка. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней с доказательством, случай кратных корней без доказательства). Метод вариации произвольных постоянных. Решение неоднородных уравнений с квазимногочленом в правой части.

4. Системы линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений. Формула Лиувилля. Метод вариации произвольных постоянных. Общее решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай простых корней с доказательством, случай кратных корней без доказательства).

5. Точки покоя: узел, седло, фокус, центр. Бифуркация Андронова – Хопфа.

Литература


- Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — 4-е изд. — М. : Наука, 1974.

- Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Изд-во МГУ, 1984.

- Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений : учеб. для гос. ун-тов / В. В. Степанов. — 7-е изд., стер. — М. : Физматгиз, 1958.

- Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учеб. для физ. спец. ун-тов / Л. Э. Эльсгольц ; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. — 2-е изд., стер. — М. : Наука, 1969.

### ($\mathbf{G_c}$) Теория вероятностей

1. Вероятностные пространства: аксиоматика Колмогорова. Условная вероятность. Независимые события. Формулы полной вероятности и Байеса. Схемы независимых испытаний Бернулли, предельные теоремы в схеме Бернулли.

2. Случайные величины. Распределения случайных величин; дискретное распределение, абсолютно непрерывное распределение. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства. Классические распределения: Бернулли, биномиальное, Пуассона, равномерное, нормальное и показательное.

3. Закон больших чисел; теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема.

Литература

- Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики / В. А. Севастьянов. — М. : Наука, 1982.

- Боровков А. А. Курс теории вероятностей / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1986.

- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988.
- Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В. Н. Тутубалин. — М. : Изд-во МГУ, 1992.
- Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. — М. : Наука, 1989.

## ($\mathbf{J_c}$) Дискретная математика, математическая логика и теория автоматов

1. Отношения эквивалентности и разбиения множества. Отношения порядка, ЧУМы и диаграммы Хассе.
2. Комбинаторные правила суммы и произведения. Принцип Дирихле. Перестановки. Биномиальные коэффициенты. Принцип включения-исключения.
3. Графы. Маршруты, связность, подграфы. Эйлеровы и гамильтоновы циклы. Изоморфизм графов.
4. Планарные графы. Теорема Эйлера о многогранниках и ее следствия. Миноры. Теорема Понтрягина – Куратовского.
5. Задача о раскраске графа. Оценки хроматического числа. Теоремы Брукса и Хивуда.
6. Булевы функции. ДНФ и КНФ. Полиномы Жегалкина. Полные системы функций. Замкнутые классы. Теорема Поста.
7. Предикаты. Формулы логики предикатов. Модели и интерпретации. Равносильность и логическое следствие. Законы логики предикатов. Сколемовская нормальная форма.
8. Метод резолюций в логике высказываний и логике предикатов.

9. Конечные автоматы. Регулярные языки. Теорема Рабина – Скотта. Теорема Клини. Построение минимального автомата. Построение автомата по языку и языка по автомату.

Литература


- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. — СПб. : Питер, 2008.
- Дистель Р. Теория графов / Р. Дистель. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2002.
- Оре О. Теория графов / О. Оре. — М. : Наука, 1980.
- Чень Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. — М. : Наука, 1983.


## ($\mathbf{K_c}$) Графы и комбинаторные алгоритмы

1. Остовы связных графов. Задача о минимальном остове. Алгоритмы Борувки – Краскла и Ярника – Прима – Дейкстры.
2. Кратчайшие пути в сетях. Алгоритм Форда – Беллмана. Алгоритм Дейкстры. Бесконтурные графы, алгоритм топологической сортировки, пути в бесконтурных сетях.
3. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда – Фалкерсона.
4. Паросочетания. Задача о полном паросочетании. Алгоритм Куна. Задача о назначениях. Венгерский алгоритм.
5. Задача коммивояжера.

Литература

- Асанов М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие для вузов / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — М. ; СПб. : Лань, 2010.
- Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. — М. : МЦНПО : БИНОМ, 2004.

### ($\mathbf{L_c}$) Основы баз данных

1. Основы управления базами данных.
2. Языки запросов.
3. Транзакции.

Литература

- Вишневский А. В. Microsoft SQL Server. Эффективная работа / А. В. Вишневский. — 1-е изд. – СПб. : Питер, 2009.
- Хомоненко А. Д. Базы данных : учеб. для вузов / А. Д. Хомоненко. — СПб. : Корона принт, 2006.
- Советов Б. Я. Базы данных. Теория и практика : учеб. для вузов / Б. Я. Советов, В. В. Цехановский, В. Д. Чертовский. — М. : Высш. шк., 2005.
- Астахова И. Ф. SQL в примерах и задачах : учеб. пособие / И. Ф. Астахова, А. П. Толстобров, В. М. Мельников. — Мн. : Новое знание, 2002.

## Направление 01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

### ($\mathrm{T_m}$) Теоретическая механика

1. Основные понятия механики. Закон Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальной точки и системы материальных точек.

2. Общие теоремы динамики системы. Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии.

3. Динамика точки. Несвободное движение точки. Дифференциальные уравнения движения точки по кривой и поверхности. Математический маятник. Движение точки под действием центральной силы. Формула Бине. Закон Всемирного тяготения. Задача Ньютона. Относительное движение точки. Дифференциальные уравнения относительного движения точки. Пример.

4. Аналитическая статика. Принцип возможных перемещений. Уравнения равновесия системы в декартовых координатах. Уравнения равновесия системы в обобщенных координатах.

5. Уравнения движения системы. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа второго рода. Канонические уравнения Гамильтона. Первые интегралы.

6. Теория колебаний. Гармонические колебания точки. Вынужденные колебания точки. Резонанс. Вывод уравнений движения механической системы около устойчивого

положения равновесия. Исследование характера движения механической системы около положения равновесия. Влияние диссипативных сил.

7. Динамика абсолютно твердого тела. Моменты инерции второго порядка. Теорема Штейнера. Тензор инерции. Главные оси инерции. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Кинематические и динамические уравнения Эйлера. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Уравнения движения свободного твердого тела.

Литература


- Аппель П. Теоретическая механика : в 2 т. / П. Аппель. — М. : Физматгиз, 1960.
- Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : учеб. пособие / Н. Н. Бухгольц. — 10-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2009.
- Вильке В. Г. Теоретическая механика / В. Г. Вильке. — М. : Изд-во МГУ, 1998.
- Маркеев А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. — М. : Наука, 1990.
- Поляхов Н. Н. Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. — М. : Высш. шк., 2000.


## ($\mathbf{M_m}$) Механика сплошных сред

1. Два способа описания движения сплошной среды. Линии тока, траектории частиц. Сопутствующая система координат. Индивидуальная, локальная и конвективная производные.

2. Деформация малой частицы. Тензор малой деформации. Уравнения совместности малых деформаций. Тензор скоростей деформации. Главные оси и инварианты тензоров.

3. Теорема Коши – Гельмгольца. Потенциальное и вихревое движение. Теоремы Томсона и Лагранжа.

4. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера. Условие несжимаемости.

5. Классификация сил в механике сплошных сред. Теорема Коши. Тензор напряжений. Уравнения движения сплошной среды.

6. Модель идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения Эйлера. Полная система уравнений идеальной несжимаемой жидкости и идеальной баротропной жидкости. Граничные условия. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости.

7. Модель упругого тела. Закон Гука. Уравнения Ламе. Полная система уравнений теории упругости. Формулировка задачи теории упругости. Теорема единственности решения. Уравнения теории упругости в перемещениях и в напряжениях. Плоская задача теории упругости. Плоская деформация и плоско-напряженное состояние.

8. Модель вязкой жидкости. Уравнение Навье – Стокса. Граничные условия.

9. Гидростатика. Уравнения равновесия. Закон Архимеда.

Литература


- Ильюшин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. — М. : Изд-во МГУ, 1978.

- Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика : в 2 т. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М. : Физматгиз, 1963.

- Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М. : Наука, 1983.

- Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. / Л. И. Седов. — СПб. : Лань, 2004.

- Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М. : Наука, 1979.

## ($\mathbf{S_m}$) Теория устойчивости движения

1. Определение устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости. Уравнения возмущенного движения. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия.

2. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теоремы Ляпунова о неустойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.

3. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Литература

- Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. — М. : Наука, 1967.

- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М. : Физматгиз, 1950.

- Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М. : Наука, 1966.

- Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абестс, М. Лалуа. — М. : Мир, 1980.

- Четаев Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. — М. : Наука, 1965.

## ($\mathbf{D_m}$) Дифференциальные уравнения

1. Задачи Коши для уравнений первого и $n$-го порядков, для систем уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Первые интегралы.

2. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения $n$-го порядка. Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

3. Система линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений. Метод вариации произвольных постоянных. Общее решение системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Литература


- Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Изд-во МГУ, 1984.

- Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — 4-е изд. — М. : Наука, 1974.

- Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений : учеб. для гос. ун-тов / В. В. Степанов. — 7-е изд., стер. — М. : Физматгиз, 1958.

## ($\mathbf{AB_m}$) Алгебра и математический анализ

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Критерии совместности. Построение общего решения совместной системы линейных уравнений.
2. Понятие тензора. Основные свойства тензоров. Приведение тензора к главным осям.
3. Интегральные уравнения. Альтернатива Фредгольма.
4. Теоремы о существовании неявных функций.
5. Ряды Тейлора и Фурье. Свойства рядов.
6. Интеграл Фурье. Свойства интеграла Фурье.

Литература


- Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1959.
- Никольский С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1990–1991.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ : Лаборатория Знаний, 2003 (а также все издания с 1968 г.).

# Глава 1
# Алгебра

## 1.1. Примеры заданий

(1—3) Линейный оператор переводит векторы $a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в векторы $b_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Найти базис ядра этого оператора.

1. (2011 — ОЧ)

$$\begin{aligned}
&a_1 = (-3, 3, -3, -4), && a_2 = (4, -1, 3, 2),\\
&a_3 = (-3, 0, 0, -1), && a_4 = (3, -4, 0, 4),\\
&b_1 = (6, 9, -3, 0), && b_2 = (-26, -14, -12, 0),\\
&b_3 = (3, 9, -6, 0), && b_4 = (6, -5, 11, 0).
\end{aligned}$$

2. (2011 — ОЧ)

$$\begin{aligned}
&a_1 = (1, 2, 1, -1), && a_2 = (0, 1, 1, 2),\\
&a_3 = (2, 4, 2, -1), && a_4 = (1, 3, 3, 2),\\
&b_1 = (1, 4, -3, 0), && b_2 = (-2, -1, -2, 0),\\
&b_3 = (-3, 2, -7, 0), && b_4 = (0, 7, -8, 0).
\end{aligned}$$

3. (2011 — ОЧ)

$$\begin{aligned}
&a_1 = (2, 1, -1, 1), && a_2 = (1, 1, 2, 0),\\
&a_3 = (4, 2, -1, 2), && a_4 = (3, 3, 2, 1),\\
&b_1 = (4, -3, 1, 0), && b_2 = (-1, -2, -2, 0),\\
&b_3 = (3, 5, -1, 0), && b_4 = (2, -7, -3, 0).
\end{aligned}$$

(4—6) Линейный оператор переводит векторы $a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в векторы $b_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Найти базис пересечения образа и ядра этого оператора.

4. (2012 — ОЧ)

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,\ -3,\ -1,\ 2), && a_2 = (1,\ -2,\ 2,\ -3),\\ &a_3 = (-2,\ 2,\ 2,\ 1), && a_4 = (1,\ -1,\ -1,\ -1),\\ &b_1 = (0,\ -3,\ 3,\ 0), && b_2 = (2,\ -9,\ 7,\ -3),\\ &b_3 = (-2,\ 3,\ -1,\ 3), && b_4 = (4,\ -3,\ -1,\ -6). \end{aligned}$$

5. (2012 — ОЧ)

$$\begin{aligned} &a_1 = (2,\ -1,\ -1,\ 1), && a_2 = (1,\ -2,\ 3,\ -3),\\ &a_3 = (-2,\ 1,\ 2,\ 2), && a_4 = (4,\ -1,\ 2,\ -1),\\ &b_1 = (1,\ -2,\ 4,\ 0), && b_2 = (1,\ -6,\ 7,\ -3),\\ &b_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 3), && b_4 = (-3,\ -2,\ -6,\ -6). \end{aligned}$$

6. (2012 — ОЧ)

$$\begin{aligned} &a_1 = (3,\ -1,\ -1,\ 2), && a_2 = (1,\ -4,\ 1,\ -3),\\ &a_3 = (-1,\ 1,\ 2,\ 1), && a_4 = (1,\ -4,\ -1,\ -1),\\ &b_1 = (3,\ -4,\ 2,\ 0), && b_2 = (7,\ -9,\ 4,\ -3),\\ &b_3 = (-1,\ 1,\ 0,\ 3), && b_4 = (-1,\ 2,\ -2,\ -6). \end{aligned}$$

(7—8) Линейное пространство порождено векторами $a_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Найти ортогональный базис ортогонального дополнения к этому пространству.

7. (2012 — ОЧ)

$$a_1 = (2,\ -5,\ 2,\ 1),\ a_2 = (5,\ -8,\ 2,\ -1),\ a_3 = (-1,\ -2,\ 2,\ 3).$$

8. (2012 — ОЧ)

$$a_1 = (5,\ -8,\ 6,\ -3),\ a_2 = (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ a_3 = (-5,\ -1,\ -8,\ -6).$$

(9—10) Найти проекцию вектора $a$ на пространство $T$.

9. (2013 — ОЧ)
$$a = (-6,\ 5,\ -5,\ 8),$$
$$T = \{(x,\ y,\ z,\ t) \mid 4x + y - 3z = 0;\ 2x - z + 3t = 0\}.$$

10. (2013 — ОЧ)
$$a = (-7,\ 4,\ 0,\ 7),$$
$$T = \{(x,\ y,\ z,\ t) \mid 2x + y - z + 4t = 0;\ 2x - y + 3z + t = 0\}.$$

11. (2013 — ОЧ) В множестве векторов
$$\{(a,\ a+7,\ a,\ a-1) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
укажите вектор, имеющий кратчайшую проекцию на пространство
$$\{(x,\ y,\ z,\ t) \mid x + 3y - z = 0;\ 2x + 3z + t = 0\}.$$

(12—14) Линейный оператор $A$ переводит векторы $c_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в векторы $a_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, а линейный оператор $B$ переводит векторы $c_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в векторы $b_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. (Оба оператора имеют ровно по одному собственному значению.) Найдите базис пространства, состоящего из общих для операторов $A$ и $B$ собственных векторов.

12. (2013 — ОЧ)
$$\begin{array}{ll}
c_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0), & c_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
c_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0), & c_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1),\\
a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 1), & a_2 = (-1,\ 2,\ 1,\ 1),\\
a_3 = (1,\ 0,\ 3,\ -1), & a_4 = (0,\ 0,\ 1,\ 2),\\
b_1 = (6,\ 4,\ -2,\ -2), & b_2 = (-1,\ 2,\ 1,\ 1),\\
b_3 = (1,\ 2,\ 3,\ -1), & b_4 = (-1,\ -2,\ 1,\ 5).
\end{array}$$

13. (2013 — ОЧ)

$$\begin{array}{ll} c_1 = (1,\, 0,\, 0,\, 0), & c_2 = (0,\, 1,\, 0,\, 0), \\ c_3 = (0,\, 0,\, 1,\, 0), & c_4 = (0,\, 0,\, 0,\, 1), \\ a_1 = (1,\, 0,\, 0,\, 1), & a_2 = (0,\, 1,\, -1,\, 2), \\ a_3 = (-2,\, 1,\, 3,\, 0), & a_4 = (1,\, -1,\, -1,\, 3), \\ b_1 = (5,\, 1,\, -1,\, 0), & b_2 = (1,\, 5,\, -1,\, 0), \\ b_3 = (2,\, 2,\, 2,\, 0), & b_4 = (1,\, 1,\, -1,\, 4). \end{array}$$

14. (2013 — ОЧ)

$$\begin{array}{ll} c_1 = (1,\, -2,\, 4,\, 1), & c_2 = (2,\, 1,\, -1,\, 1), \\ c_3 = (1,\, -1,\, 0,\, 2), & c_4 = (1,\, 1,\, -1,\, 1), \\ a_1 = (-5,\, -22,\, 6,\, 2), & a_2 = (8,\, 6,\, -4,\, 2), \\ a_3 = (9,\, 4,\, -4,\, 4), & a_4 = (8,\, 10,\, -4,\, 2), \\ b_1 = (11,\, 2,\, 4,\, 3), & b_2 = (8,\, 5,\, -5,\, 3), \\ b_3 = (5,\, -1,\, -2,\, 6), & b_4 = (4,\, 4,\, -4,\, 3). \end{array}$$

(15—17) Найдите ортогональный базис суммы пространства с базисом $a_i$ ($i = 1,\, 2$) и пространства $T$.

15. (2014 — ОЧ)

$$a_1 = (1,\, -1,\, 1,\, -1), \quad a_2 = (0,\, 0,\, 0,\, 1),$$

$$T = \{(x,\, y,\, z,\, t) |\, 4x + y - 3z = 0;\, 2x - z + 3t = 0\}.$$

16. (2014 — ОЧ)

$$a_1 = (1,\, 2,\, 1,\, -1), \quad a_2 = (0,\, 0,\, 0,\, 1),$$

$$T = \{(x,\, y,\, z,\, t) |\, 2x + y + 4t = 0;\, 2x - y + 2z + t = 0\}.$$

17. (2014 — ОЧ)

$$a_1 = (2,\, 1,\, -1,\, 0), \quad a_2 = (0,\, -1,\, 0,\, 1),$$

$$T = \{(x,\, y,\, z,\, t) |\, 3x + y + z + 4t = 0;\, 2x + 2z + t = 0\}.$$

(18—20) В четырехмерном пространстве линейные операторы $A$ и $B$ выполняют сначала поворот на $X$ градусов вокруг линейного пространства с базисом $a_1$, $a_2$, а затем ортогональное проектирование на линейное пространство с базисом $a_3$, $a_4$. Найдите базисы ядер обоих этих операторов.

18. (2014 — ОЧ)

$$X = 90,$$

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ -1), && a_2 = (1,\ 1,\ -1,\ 0),\\ &a_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 0), && a_4 = (0,\ 1,\ 0,\ 0). \end{aligned}$$

19. (2014 — ОЧ)

$$X = 90,$$

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 1), && a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1),\\ &a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0), && a_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1). \end{aligned}$$

20. (2014 — ОЧ)

$$X = 120,$$

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 0), && a_2 = (0,\ 0,\ 0,\ 1),\\ &a_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0), && a_4 = (0,\ 0,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

(21—23) Линейный оператор $A$ переводит векторы $a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в векторы $b_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, соответственно. Найдите полный прообраз вектора $x$ при действии оператора $A$.

21. (2015 — ОЧ)

$$x = (0,\ -1,\ 4,\ -4),$$

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ -1), && a_2 = (1,\ 1,\ -1,\ 0),\\ &a_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 0), && a_4 = (0,\ 1,\ 0,\ -1),\\ &b_1 = (1,\ 0,\ 2,\ -1), && b_2 = (1,\ 1,\ -1,\ 2),\\ &b_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0), && b_4 = (1,\ 1,\ 0,\ 1). \end{aligned}$$

22. (2015 — ОЧ)

$$x = (2,\ 1,\ -1,\ 2),$$

$$\begin{array}{ll} a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ -1), & a_2 = (1,\ 1,\ -1,\ 1), \\ a_3 = (1,\ 2,\ 1,\ -1), & a_4 = (1,\ 0,\ 0,\ -1), \\ b_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 2), & b_2 = (1,\ 0,\ -1,\ 1), \\ b_3 = (1,\ -1,\ 1,\ 2), & b_4 = (1,\ 1,\ 0,\ 1). \end{array}$$

23. (2015 — ОЧ)

$$x = (0,\ 3,\ 1,\ 1),$$

$$\begin{array}{ll} a_1 = (-1,\ 1,\ 0,\ -1), & a_2 = (1,\ 2,\ -1,\ 1), \\ a_3 = (1,\ 2,\ 0,\ -1), & a_4 = (1,\ 0,\ 2,\ -1), \\ b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 2), & b_2 = (1,\ 0,\ -2,\ 1), \\ b_3 = (1,\ -1,\ -1,\ 1), & b_4 = (1,\ 2,\ 0,\ 2). \end{array}$$

(24—26) Найдите ортогональный базис пересечения пространства с базисом $a_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и пространства $T$.

24. (2015 — МТ СЧ)

$$a_1 = (0,\ 2,\ 3,\ 1), \quad a_2 = (2,\ 3,\ 2,\ 2), \quad a_3 = (4,\ 1,\ 2,\ 0),$$

$$T = \{(x,\ y,\ z,\ t) \,|\, 2x + y - z + t = 0\}.$$

25. (2015 — МТ СЧ)

$$a_1 = (-3,\ 4,\ 0,\ 4), \quad a_2 = (3,\ 3,\ 3,\ -1), \quad a_3 = (1,\ 0,\ 2,\ 4),$$

$$T = \{(x,\ y,\ z,\ t) \,|\, 2x - y + z - t = 0\}.$$

26. (2015 — МТ СЧ)

$$a_1 = (2,\ 1,\ 2,\ 1), \quad a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ -1), \quad a_3 = (0,\ -1,\ 2,\ -1),$$

$$T = \{(x,\ y,\ z,\ t) \,|\, x + y + 2z - t = 0\}.$$

## 1.2. Решения

**Задача 7.** Пусть $L$ — линейная оболочка векторов $a_1 = (2,\ -5,\ 2,\ 1)$, $a_2 = (5,\ -8,\ 2,\ -1)$, $a_3 = (-1,\ -2,\ 2,\ 3)$.

Найдем какой-нибудь вектор из ортогонального дополнения к $L$, решив однородную систему линейных уравнений с матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя матрицу методом Гаусса, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом мы одновременно нашли размерность пространства $L$, она равна 2. Значит, базис ортогонального дополнения состоит из двух векторов.

Ищем решение последней системы в виде $(*,\ *,\ 3,\ 0)$ (для скорости записи удобно получить его целочисленным). Подставив во второе уравнение, получим $(*,\ 2,\ 3,\ 0)$. Подставив в первое уравнение, получим $(2,\ 2,\ 3,\ 0)$.

Это один из векторов ортогонального дополнения. Второй вектор ортогонального базиса ортогонального дополнения перпендикулярен как $L$, так и найденному вектору, следовательно, он является решением системы

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя матрицу методом Гаусса, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -22 & -17 \\ 0 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -22 & -17 \\ 0 & 0 & 51 & 40 \end{pmatrix}.$$

Ищем решение последней системы в виде $(*, *, *, 51)$ (для скорости записи удобно получить его целочисленным). Подставив в третье уравнение, получим $(*, *, -40, 51)$. Подставив во второе уравнение, получим $(*, 13, -40, 51)$. Подставив в первое уравнение, получим $(47, 13, -40, 51)$.

**Ответ:** ортогональным базисом искомого ортогонального дополнения является, например, пара векторов $(2, 2, 3, 0)$ и $(47, 13, -40, 51)$.

# Глава 2
# Математический анализ

## 2.1. Примеры заданий

(1—2) Найти множество (поточечной) сходимости функционального ряда и исследовать свойства непрерывности и дифференцируемости суммы ряда

1. (2011 — ОЧ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^x + 1}.$$

2. (2011 — ОЧ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}}{n^x}.$$

(3—5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на заданном множестве $D \subset R^2$.

3. (2011 — ОЧ)

$$f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

4. (2011 — ОЧ)

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1\}.$$

5. (2011 — ОЧ)

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leqslant 2, \quad |y| \leqslant 2\}.$$

(6—7) Найти область сходимости и сумму ряда.

6. (2012 — ОЧ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

7. (2012 — ОЧ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}.$$

(8—9) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на указанном множестве.

8. (2012 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = \frac{z}{2} - \frac{xz}{6} - \frac{yz}{8},$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leqslant 1, \quad z - xy = 0.$$

9. (2012 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = 2z - 2zx - yz,$$

$$x \geqslant 0,\; y \geqslant 0, \quad 2x + y \leqslant 2, \quad 2z - 3xy = 0.$$

10. (2012 — ОЧ) Найти множество поточечной сходимости ряда. Исследовать его на равномерную сходимость. Исследовать сумму $S(x)$ этого ряда на непрерывность. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty} S(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

11. (2012 — ОЧ) Найти множество поточечной сходимости ряда. Исследовать его на равномерную сходимость. Исследовать сумму $S(x)$ этого ряда на непрерывность. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} S(x)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{1+x^{2n}}.$$

(12—13) Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[0,\, 1]$. Вычислить предел.

12. (2012 — МТ СЧ)

$$\lim_{h\to+0} h \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+h^2} dx.$$

13. (2012 — МТ СЧ)

$$\lim_{h\to+0} h \int\limits_0^{\infty} e^{-xh} f(x) dx.$$

(14—15) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на заданном множестве в $R^3$.

14. (2012 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6z - 3y^2,$$

$$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2, \quad z - xy = 0.$$

15. (2012 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x^3 + 8y^3 - 3x + 6z - 6y,$$

$$0 \leqslant x \leqslant 2y \leqslant \sqrt{2}, \quad z^2 = 2xy, \quad z \geqslant 0.$$

(16—18) Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$. Вычислить предел.

16. (2013 — МТ СЧ)

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^1 f(x)\frac{e^{xT}-1}{e^{xT}+1}dx.$$

17. (2013 — МТ СЧ)

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^1 f(x)\frac{xt+x^2}{xt+1}dx.$$

18. (2013 — ОЧ)

$$\lim_{h\to+0} h\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+h)^2}dx.$$

(19—21) Найти область сходимости ряда. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ суммы ряда.

19. (2013 — ОЧ)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}\right)^x.$$

20. (2013 — ОЧ)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}\right)^x.$$

21. (2013 — ОЧ)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^x.$$

(22—24) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f$ на заданном множестве в $R^3$.

22. (2013 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x - 2y + z, \quad 2x + y - z = 0, \quad 4x^2 + y^2 \leqslant 4.$$

23. (2013 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x + y - z, \quad x - 2y + z = 0, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 4.$$

24. (2013 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = \sqrt{3}y + z, \quad x - z = 0, \quad (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0.$$

(25—30) Найти предел. Обосновать метод решения.

25. (2014 — МТ СЧ)

$$\lim_{a \to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \cos ax}{1 + x^4} dx.$$

26. (2014 — МТ СЧ)

$$\lim_{b \to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x \cos bx}{(e^x + 1)^2} dx.$$

27. (2014 — МТ СЧ)

$$\lim_{a \to +0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + ax)}{x^4 + 1} dx.$$

28. (2015 — МТ СЧ)

$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 + \sin ax}{x^6 + 2x^3 + 2} dx.$$

29. (2015 — МТ СЧ)

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+\cos ax}{x^6+2x^3+3}dx.$$

30. (2015 — МТ СЧ)

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin^2 ax}{x^4+2x^2+2}dx.$$

(31—32) Найти $D(f)$, исследовать $f$ на непрерывность, найти конечные или бесконечные пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x).$$

31. (2014 — ОЧ)

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n}.$$

32. (2014 — ОЧ)

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[\ln(n+2)-\ln n]^x}{2^n}.$$

33. (2014 — ОЧ) Для функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{2}}\right]^x$$

найти $D(f)$, исследовать $f$ на непрерывность, найти конечные или бесконечные пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\qquad \lim_{x\to-(\sqrt{2}+1)-0}f(x).$$

(34—39) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f$ на множестве $M$.

34. (2014 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = 3x + y^4 + z^4,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : 3x + y^2 + z^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0\}.$$

35. (2014 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x^4 + 4y + z^4,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : x^2 + 4y + z^2 \leqslant 9, \quad y \geqslant 0\}.$$

36. (2014 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = xyz,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : x + 2y + 3z \leqslant 1, \quad x,\, y,\, z \geqslant 0\}.$$

37. (2015 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = |xy|z,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : |x| + 2|y| + z \leqslant 4, \quad z \geqslant 0\}.$$

38. (2015 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x|yz|,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : x + |y| + 3|z| \leqslant 10, \quad x \geqslant 0\}.$$

39. (2015 — ОЧ)

$$f(x,\, y,\, z) = x + |y| + |z|,$$

$$M = \{(x,\, y,\, z) : x|yz| = 8\}.$$

40. (2014 — ОЧ) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на заданном множестве $D \subset R^3$:

$$f(x,\, y,\, z) = x + y + z,$$

$$D = \{(x,\, y,\, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, \quad z \geqslant -1\}.$$

(41—43) Найти $D(f)$, исследовать $f$ на непрерывность, найти $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

41. (2015 — ОЧ) определить знак $f(1)$:

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt[n]{3} - 1)^x}{n^2}.$$

42. (2015 — ОЧ) определить знак $f(0)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln \frac{n^2+2}{n^2}}{n^x}.$$

43. (2015 — ОЧ) определить знак $f(2{,}5)$:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^x - 1}{n^x}.$$

## 2.2. Решения

**Задача 1.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^x + 1}.$$

1. Найдем область поточечной сходимости ряда.
Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$, то

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \sim \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$$

при $n \to \infty$ ($a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$).
Поэтому

$$u_n(x) \equiv \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^x + 1} = \frac{\sqrt[3]{n}[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1]}{n^x + 1}$$

$$\sim \begin{cases} \frac{1}{3} n^{-\frac{2}{3}}, & x < 0, \\ \frac{1}{6} n^{-\frac{2}{3}}, & x = 0, \\ \frac{1}{3} \frac{1}{n^{x+\frac{2}{3}}}, & x > 0 \end{cases} \equiv v_n(x).$$

Согласно признаку сравнения в предельной форме для рядов с положительными членами, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходятся или расходятся (при произвольном $x$) одновременно. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится поточечно при $x > \frac{1}{3}$, то это и есть область поточечной сходимости исходного ряда.

2. Исследуем сумму $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на дифференцируемость в области $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Найдем $u_n'(x) = -\frac{(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) n^x \ln n}{(n^x+1)^2}$.
Покажем, что

$$\exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \text{при} \quad x > \frac{1}{3}.$$

Для этого установим возможность применения теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда в некоторой окрестности каждой точки интервала $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Для этого достаточно получить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ в таких окрестностях.

Возьмем произвольно $x_0 > \frac{1}{3}$ и $\delta \in (0,\, x_0 - \frac{1}{3})$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно в $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$. Действительно, при любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \ln n}{n^x + 1} \frac{n^x}{n^x + 1}$$

$$\leqslant \frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\ln n}{n^{x_0-\delta}+1} \equiv c_n.$$

По признаку Вейерштрасса равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ в $O_\delta(x_0)$ имеет место, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Установим сходимость этого числового ряда.

Так как $c_n \sim \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n^{x_0-\delta+\frac{2}{3}}} \equiv \frac{d_n}{3}$, $n \to \infty$ (по предыдущему), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ сходятся или расходятся одновременно. Пусть $\alpha \in (1,\, x_0-\delta+\frac{2}{3})$, $p_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится и $\frac{d_n}{p_n} = \frac{\ln n}{n^{x_0-\delta+\frac{2}{3}-\alpha}} \to 0$, $n \to \infty$, то по признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, т. е. и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

Итак, $\exists S'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$. Ввиду произвольности точки $x_0 > \frac{1}{3}$, функция $S(x)$ дифференцируема на $(\frac{1}{3},\, +\infty)$ и $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ при $x > \frac{1}{3}$. Из дифференцируемости функции $S$ следует ее непрерывность на $(\frac{1}{3},\, +\infty)$.

**Задача 3.**

$$f(x,\, y) = x^2 + 4xy - y^2, \quad D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Множество $D$ замкнуто и ограничено, а функция $f$ непрерывна на нем, поэтому по теореме Вейерштрасса функция $f$ принимает на $D$ наименьшее и наибольшее значения. Эти значения являются экстремальными. Выявим точки, подозрительные на экстремум, внутри $D$, т. е. в области $|x|+|y| < 1$, и на условный экстремум на $\partial D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| = 1\}$.

1. $|x| + |y| < 1$. Приравнивая $f_x'$ и $f_y'$ к нулю, получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0, \\ 4x - 2y = 0, \end{cases}$$

единственное решение которой $x = y = 0$. При этом $f(0,\, 0) = 0$.

2. $|x| + |y| = 1$. Так как $f(-x, -y) = f(x, y)$ и множество $D$ симметрично относительно осей координат, то достаточно рассмотреть множества

$$x + y = 1,\ x, y \geqslant 0, \quad \text{и} \quad x - y = 1,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0.$$

2.1. $x + y = 1$, $x, y \geqslant 0$. В этом случае $x = 1 - y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда $f(1 - y, y) = (1 - y)^2 + 4(1 - y)y - y^2 = 1 + 2y - 4y^2$ — квадратный трехчлен, принимающий на отрезке $[0, 1]$ наибольшее значение в точке $\frac{1}{4}$, равное $\frac{5}{4}$, и наименьшее значение в точке 1, равное $-1$.

2.2. $x - y = 1$, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. В этом случае $x = 1 + y$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Тогда $f(1 + y, y) = (1 + y)^2 + 4(1 + y)y - y^2 = 1 + 6y + 4y^2$ — квадратный трехчлен, принимающий на отрезке $[-1, 0]$ наименьшее значение в точке $-\frac{3}{4}$, равное $-\frac{5}{4}$, и наибольшее значение в точке 0, равное 1.

Таким образом, наименьшее значение функции $f$ на $D$ равно $\min\{0, -1, -\frac{5}{4}\} = -\frac{5}{4}$ (принимается в точках $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ и $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$), а наибольшее значение равно $\max\{0, \frac{5}{4}, 1\} = \frac{5}{4}$ (принимается в точках $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ и $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$).

**Задача 6.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2^n)!}.$$

Заменим $x$ на $t^2$ при $x \geqslant 0$ и на $-t^2$ при $x \leqslant 0$, считая $t \geqslant 0$. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} - 1 = \operatorname{ch} t - 1, & x \geqslant 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - 1 = \cos t - 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, данный ряд сходится на всей оси к сумме

$$S(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} - 1, & x \geqslant 0, \\ \cos \sqrt{-x} - 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

**Задача 8.**

$$f(x,\,y,\,z)=\frac{z}{2}-\frac{xz}{6}-\frac{yz}{8},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}\leqslant 1,\ z-xy=0.$$

По условию задачи требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi(x,\,y)=f(x,\,y,\,xy)=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}$ на множестве $D=\{(x,\,y)\colon x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}\leqslant 1\}$.

Множество $D$ компактно (замкнуто, ограничено), а непрерывная функция $\varphi$ принимает наименьшее и наибольшее значения на нем. Эти значения являются экстремальными. Выявим точки, подозрительные на экстремум внутри $D$, и на условный экстремум на $L_1=\{(0,\,y)\colon y\geqslant 0,\ \frac{y}{4}\leqslant 1\}$, $L_2=\{(x,\,0)\colon x\geqslant 0,\ \frac{x}{3}\leqslant 1\}$ и $L_3=\{(x,\,y)\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

1. $x>0,\ y>0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}<1$. Приравниваем $\varphi'_x$ и $\varphi'_y$ к нулю. Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2}-\dfrac{xy}{3}-\dfrac{y^2}{8}=0, \\[2mm] \dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{xy}{4}=0, \end{cases}$$

решениями которой являются точки $(0,\,0)$, $(0,\,4)$, $(3,\,0)$, $(1,\,\frac{4}{3})$. Рассматриваемому множеству (внутренности $D$) принадлежит точка $(1,\,\frac{4}{3})$, при этом $\varphi(1,\,\frac{4}{3})=\frac{2}{9}$.

2. На $L_1:\varphi(x,\,y)=\varphi(0,\,y)=0$.

3. На $L_2:\varphi(x,\,y)=\varphi(x,\,0)=0$.

4. На $L_3:\varphi(x,\,y)=\varphi(x,\,4-\frac{4}{3}x)=x(4-\frac{4}{3}x)-\frac{x^2(4-\frac{4}{3}x)}{6}-\frac{x(4-\frac{4}{3}x)^2}{8}\equiv\psi(x)$, $x\in[0,\,3]$. Имеем $\psi(0)=\psi(3)=0$. Находим стационарные точки $\psi$ на $(0,\,3)$, приравнивая $\psi'$ к нулю: $\psi'(x)=-\frac{4}{3}x+2=0$ при $x=\frac{3}{2}$, при этом $\psi(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Итак, наименьшее значение $f$ на заданном множестве равно $\min\{\frac{2}{9},\,0,\,\frac{3}{2}\}=0$, наибольшее значение равно $\max\{\frac{2}{9},\,0,\,\frac{3}{2}\}=\frac{3}{2}$.

**Задача 11.**
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{1+x^{2n}}.$$

Найдем множество поточечной сходимости. При $|x|\leqslant 1$ имеем
$$u_n(x)\equiv\frac{n^x}{1+x^{2n}}\sim Cn^x \text{ при } n\to\infty,$$
где $C=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\end{cases}$ $(a_n\sim b_n,$ если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1)$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^x$ расходится при $x\geqslant -1$, то по признаку сравнения в предельной форме для рядов с положительными членами ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ расходится при $|x|\leqslant 1$. Пусть $|x|>1$. Тогда $u_n(x)\sim\frac{n^x}{x^{2n}}$. По признаку Коши сходимости рядов (с корнем) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{x^{2n}}$ при $|x|>1$ сходится, поскольку при $n\to\infty$ имеем $\sqrt[n]{\frac{n^x}{x^{2n}}}=\frac{(\sqrt[n]{n})^x}{x^2}\to\frac{1}{x^2}<1$ при этих $x$. Следовательно, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится при $|x|>1$. Итак, множество $X$ поточечной сходимости равно $(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$.

Поскольку $\sup\limits_{x\in X}u_n(x)\geqslant\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n^x}{1+x^{2n}}=+\infty$ при $n>1$, то при $n>1$ $\sup\limits_{x\in X}u_n(x)=+\infty\not\to 0,\ n\to\infty$, т. е. последовательность $u_n(x)$ стремится неравномерно на $X$ к нулю. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится на $X$ неравномерно (не выполняется необходимое условие равномерной сходимости — равномерное стремление к нулю общего члена ряда). Другое доказательство отсутствия равномерной сходимости можно провести с помощью теоремы о предельном переходе под знаком ряда. Если предположить, что ряд равномерно сходится на $X$, то по этой теореме сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to 1+0}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)$ (использована непрерывность членов ряда), что неверно, так как $1\notin X$.

Установим непрерывность $S(x)$ на $X$. Возьмем произвольно $x_0 \in X$ и $\varepsilon \in (0,\, |x_0|-1)$. Имеем $\forall x \in O_\delta(x_0) = (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{n^{|x_0|+\delta}}{(|x_0|-\delta)^{2n}+1} < \frac{n^{|x_0|+\delta}}{(|x_0|-\delta)^{2n}} \equiv c_n.$$

По признаку Коши (с корнем) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится (здесь важно, что $|x_0|-\delta > 1$), поэтому по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости рядов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в $O_\delta(x_0)$. Тогда по теореме о непрерывности суммы функционального ряда с учетом непрерывности функций $u_n(x)$ функция $S(x)$ непрерывна в точке $x_0$, произвольной точке множества поточечной сходимости. Так как при $x < -2$ $u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $(-\infty,-2)$. Поэтому по теореме о предельном переходе под знаком ряда $\lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{n^x}{1+x^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. С другой стороны, $S(x) \geqslant u_2(x) = \frac{2^x}{1+x^4} \to +\infty$, $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

**Задача 12.**

$$\lim_{h\to+0} h \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+h^2}\, dx.$$

Возьмем произвольно $\delta \in (0,\, 1)$ и представим интеграл под знаком предела в виде:

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+h^2}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{f(0)}{x^2+h^2}\, dx + \int\limits_0^\delta \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}\, dx$$

$$+\int\limits_{\delta}^{1} \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}\,dx.$$

Далее,

$$h\int\limits_{0}^{1} \frac{f(0)}{x^2+h^2}\,dx = f(0)\operatorname{arctg}\frac{1}{h} \longrightarrow \frac{\pi}{2}f(0), \ \text{ при } \ h\to +0.$$

Покажем, что

$$h\int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)}{x^2+h^2}\,dx \longrightarrow \frac{\pi}{2}f(0), \ \text{ при } \ h\to +0.$$

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$. Из условия непрерывности $f$ в точке 0 найдем по $\varepsilon$ такое $\delta > 0$, что при всех $x\in[0,\,\delta]$ выполняется $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. Тогда при $h>0$

$$h\left|\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}\,dx\right| \leqslant h\int\limits_{0}^{\delta} \frac{|f(x)-f(0)|}{x^2+h^2}\,dx \leqslant \varepsilon\operatorname{arctg}\frac{x}{h}\Big|_0^{\delta} < \frac{\pi}{2}\varepsilon.$$

Так как $\frac{|f(x)-f(0)|}{x^2+h^2} \leqslant \frac{|f(x)-f(0)|}{x^2}$ $(x\in(0,\,1])$, то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\int\limits_{\delta}^{1} \frac{|f(x)-f(0)|}{x^2+h^2}\,dx \longrightarrow \int\limits_{0}^{1} \frac{|f(x)-f(0)|}{x^2}\,dx, \ \text{ при } \ h\to +0.$$

Этот вывод можно сделать, не используя теорему Лебега, но заключив равномерную сходимость функции $\varphi(x,\,h) = \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}$ при $h\to +0$ к $\varphi(x,\,0)$ на $[\delta,\,1]$ с учетом непрерывности функции $\varphi$ на $[\delta,\,1]\times[0,\,1]$.

Поэтому

$$h\int\limits_{\delta}^{1} \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}\,dx \to 0, \ \text{ при } \ h\to +0.$$

По взятому $\varepsilon > 0$ найдем такие $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$, что при всех $h \in (0,\, h_1)$

$$\left| h\int_0^1 \frac{f(0)}{x^2 + h^2}\, dx - \frac{\pi}{2} f(0)\right| < \varepsilon$$

и при всех $h \in (0,\, h_2)$ выполняется $\left| h\int_\delta^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^2+h^2}\, dx\right| < \varepsilon$. Пусть $h_0 = \min\{h_1,\, h_2\}$. Тогда при любом $h \in (0,\, h_0)$

$$\left| h\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2}\, dx - \frac{\pi}{2} f(0)\right| \leqslant \left| h\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2}\, dx - \frac{\pi}{2} f(0)\right|$$

$$+h\left|\int_0^\delta \frac{f(x)-f(0)}{x^2 + h^2}\, dx\right| + h\left|\int_\delta^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^2 + h^2}\, dx\right| < \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\varepsilon.$$

Поэтому $\lim\limits_{h\to+0} h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x^2+h^2}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0)$.

**Задача 16.**

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^1 f(x)\,\frac{e^{xT}-1}{e^{xT}+1}\, dx.$$

Заметим, что при $x > 0$ $\frac{e^{xT}-1}{e^{xT}+1} \to 1,\ T \to +\infty$. Кроме того, при всех $x$ и $T$ $\left|\frac{e^{xT}-1}{e^{xT}+1}\right| < 1$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^1 f(x)\frac{e^{xT}-1}{e^{xT}+1}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

**Задача 21.**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^x.$$

Представим $\operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $x \to 0$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\operatorname{tg} x)'' = 2\cos^{-3} x \sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)''' = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 + (\operatorname{tg} x)'\big|_{x=0} x + \frac{(\operatorname{tg} x)''\big|_{x=0}}{2!} x^2 + \frac{(\operatorname{tg} x)'''\big|_{x=0}}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \sim \frac{1}{3n^{\frac{3}{2}}},$$

($a_n \sim b_n$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 1, \ n \to \infty$). По признаку сравнения в предельной форме для рядов с положительными членами, для сходимости данного ряда в точке $x$ необходима и достаточна сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}x}}$. Это верно тогда и только тогда, когда $\frac{3}{2}x > 1$, т. е. $x > \frac{2}{3}$.

Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

При $x > 1$, $n \in \mathbb{N}$ $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^x \leqslant \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$, поскольку при $n = 1$ $\operatorname{tg} 1 - 1 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 1 = \sqrt{3} - 1 < 1$, при $n > 1$ $\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Так как по доказанному ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ сходится (это заданный ряд при $x = 1$), то по признаку Вейерштрасса заданный ряд сходится равномерно на $(1,\, +\infty)$. По теореме о предельном переходе под знаком ряда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

**Задача 24.**

$$f(x,\, y,\, z) = \sqrt{3}y + z, \quad x - z = 0, \quad (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на заданном множестве совпадают соответственно с наибольшим и наименьшим значениями функции $\varphi(x,\, y) = f(x,\, y,\, x) = \sqrt{3}y + x$ на множестве $D = \{(x,\, y)\colon (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$. Множество $D$ компактно (ограничено и замкнуто), а функция $\varphi$ непрерывна на $D$, поэтому по теореме Вейерштрасса наибольшее и наименьшее значения функция $\varphi$ принимает на $D$. Эти значения экстремальны.

1. Ищем точки, подозрительные на экстремум внутри $D$, т. е. на множестве $(x+1)^2 + y^2 < 4,\ x > 0$.

Так как $\varphi'_x = 1 \neq 0$, то таких точек нет.

2. Исследуем $\varphi$ на экстремум на множестве $\{(0,\, y)\colon |y| \leqslant \sqrt{3}\}$ :

$$\varphi(0,\, y) = \sqrt{3}y, \quad \min_{|y|\leqslant\sqrt{3}} \varphi(0,\, y) = -3, \quad \max_{|y|\leqslant\sqrt{3}} \varphi(0,\, y) = 3.$$

3. Исследуем $\varphi$ на экстремум на множестве $(x+1)^2 + y^2 = 4,\ x > 0$. Строим функцию Лагранжа

$$L(x,\, y,\, \lambda) = \varphi(x,\, y) + \lambda((x+1)^2 + y^2 - 4)$$

$$\equiv x + \sqrt{3}y + \lambda((x+1)^2 + y^2 - 4).$$

Необходимое условие относительного экстремума имеет вид

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + 2\lambda(x+1) = 0, \\ \sqrt{3} + 2\lambda y = 0, \\ (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ x > 0. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{y}{x+1} = \sqrt{3}$, т. е. $(x+1)^2 + 3(x+1)^2 = 4,\ x + 1 = \pm 1$, что невозможно при $x > 0$. Таким образом, наибольшее значение, интересующее нас, равно 3, а наименьшее равно $-3$.

**Задача 25.** Подынтегральная функция $f(x, a) = \frac{x\cos ax}{1+x^4}$ как функция двух переменных — непрерывна на $M = \{(x, a)\colon x \in [0, +\infty),\ |a| \geqslant 0\}$. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos ax}{1+x^4}\, dx$$

по признаку Вейерштрасса равномерно сходится на $|a| \geqslant 0$, так как

$$\left|\frac{x\cos ax}{1+x^4}\right| \leqslant \frac{x}{1+x^4}$$

и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$ сходится, он равен

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда по теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру функция

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos ax}{1+x^4}\, dx$$

непрерывна для $|a| \geqslant 0$, в частности, в точке $a = 0$, т. е. существует

$$\lim_{a\to 0} F(a) = F(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos 0x}{1+x^4}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

**Задача 30.**

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin^2 ax}{x^4+2x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x\sin^2 ax}{x^4+2x^2+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos 2ax}{x^4+2x^2+2}\,dx\right).$$

Покажем, что второй интеграл при $a \to +\infty$ стремится к нулю.

*1 способ.* Функция $\frac{x}{x^4+2x^2+2}$ абсолютно интегрируема на $[0, +\infty)$, так как

$$\frac{x}{x^4+2x^2+2} \sim \frac{1}{x^3}$$

при $x \to +\infty$, тогда по лемме Римана

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos 2ax}{x^4+2x^2+2}\,dx = 0.$$

Далее,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{x^4+2x^2+1+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом,

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin^2 ax}{x^4+2x^2+2}\,dx=\frac{\pi}{8}.$$

*2 способ.* К $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 2ax}{x^4+2x^2+2}\,dx$ применим метод интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 2ax}{x^4+2x^2+2}\,dx=\Big[u=\frac{x}{x^4+2x^2+2},\ dv=\cos 2ax,$$

$$du=\frac{x^4+2x^2+2-4x^4-4x^2}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx,\ v=\frac{\sin 2ax}{2a}\Big]$$

$$=\frac{x}{x^4+2x^2+2}\cdot\frac{\sin 2ax}{2a}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{+\infty}\sin 2ax\frac{3x^4+2x^2-2}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_0^{+\infty}\sin 2ax\frac{3x^4+2x^2-2}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx,$$

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\sin 2ax\frac{3x^4+2x^2-2}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx\right|\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{(|3x^4|+6x^2+6)}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx$$

$$=3\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+2x^2+2}\leqslant\frac{3}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty}=\frac{3\pi}{4},$$

т. е.

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 2ax}{x^4+2x^2+2}\right|\,dx\leqslant\frac{1}{2|a|}\frac{3\pi}{4}\to 0,\quad a\to+\infty,$$

а предел первого интеграла равен $\frac{\pi}{8}$.

**Задача 31.**

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n}.$$

1. $D(f)$ — множество поточечной сходимости ряда. По признаку сравнения для рядов с положительными членами в предельной форме, данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x 3^n}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 3,\ n \to \infty$. Этот ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ в силу признака Даламбера, так как

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^x 3^{n+1}}}{\frac{1}{n^x 3^n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^x \to \frac{1}{3} < 1, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2. Исследуем $f$ на непрерывность на $\mathbb{R}$. Возьмем произвольно $x_0 \in \mathbb{R}$. При любом $x$ из окрестности $(x_0 - 1,\ x_0 + 1)$ точки $x_0$ справедливо неравенство $\frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n} \leqslant \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^{x_0-1}}{3^n}$ $(n \geqslant 2)$. Так как $x_0 - 1 \in D(f)$, то исходный ряд равномерно сходится на $(x_0-1,\ x_0+1)$ по признаку Вейерштрасса. Так как члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, т. е. и в точке $x_0$, то по теореме о непрерывности суммы функционального ряда функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, произвольной точке $D(f)$.

3. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

При $n \geqslant 2,\ x \geqslant 0$ $\frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$ и, поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится, функциональный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n}$ на $[0,\ \infty)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому по теореме о предельном переходе под знаком ряда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{3^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} 0 = 0$.

4. Найдем $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Из неравенства $f(x) \geqslant \frac{(\sqrt{3}-1)^x}{3^2}$ и соотношения $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{3}-1)^x}{9} = +\infty$ следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**Задача 32.**

1. $D(f)$ — множество поточечной сходимости ряда.

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^x}{2^n}, \quad a_n(x) = \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^x}{2^n} > 0,\ \forall n \text{ и } \forall x,$$

$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ при $n\to\infty$, $\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^x \sim \frac{2^x}{n^x}$ при $n\to\infty$, т. е.

$$a_n(x) \sim \frac{2^x}{2^n n^x} \text{ при } n\to\infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^x}{2^n n^x}$ сходится на $\mathbb{R}$ по предельному признаку Коши, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^x}{2^n n^x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2})^x}{2(\sqrt[n]{n})^x} = \frac{1}{2},$$

так как $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n\to\infty$. Итак, $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Докажем, что $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^x}{2^n} \leqslant \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^a}{2^n}, \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

а $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^a}{2^n}$ сходится.

Тогда для $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ найдется $(a_0, b_0)$, содержащий $x_0$, на этом интервале есть равномерная сходимость ряда и члены ряда непрерывны. Тогда сумма ряда на этом интервале непрерывна, значит непрерывна в точке $x_0$, произвольной точке из $\mathbb{R}$.

3. Ряд равномерно сходится на луче: $x \geqslant c$, где $c > 0$, так как

$$\frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^x}{2^n} \leqslant \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^c}{2^n}$$

и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(1+\frac{2}{n}))^c}{2^n}$ сходится. Тогда можно почленно перейти к пределу суммы ряда при $x \to +\infty$, а каждый член ряда при $x \to +\infty$ имеет предел, равный нулю, так как $\ln(1+\frac{2}{n}) < 1$, $\forall n \geqslant 2$.

Доказали, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, так как справедлива теорема о предельном переходе и $\lim\limits_{x\to-\infty} a_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\ln 2)^x}{2^2} = +\infty$, остальные члены ряда положительны.

**Задача 34.** Множество $M$ ограничено поверхностью параболоида и плоскостью. Это ограниченное замкнутое множество, и на нем $f(x, y, z)$ непрерывна. Тогда по теореме Вейерштрасса $f$ принимает на $M$ свои наибольшее и наименьшее значения.

1. Находим $\min f(x, y, z)$ на $M$. Имеем $f(x, y, z) \geqslant 0$ и $f(0, 0, 0) = 0$ (точка $(0, 0, 0) \in M$).

Отсюда $\min f(x, y, z) = 0$.

2. Находим $\max f(x, y, z)$ на $M$.

Максимум достигается либо внутри $M$, тогда это точки локального экстремума, либо на границе. Имеем $f'_x(x, y, z) = 3 \neq 0$, т. е. максимум принимается на границе $M$.

Переходим на границу, она состоит из двух частей:

I. $\quad x = 0, \quad y^2 + z^2 \leqslant 4,$
на этой части границы рассмотрим

$$f_1(y, z) = y^4 + z^4 \ \text{ на } \ y^2 + z^2 \leqslant 4.$$

II. $\quad 3x + y^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4 - 3x \leqslant 4,$
на этой части границы

$$f_2(y, z) = 4 - y^2 - z^2 + y^4 + z^4 \ \text{ на } \ y^2 + z^2 \leqslant 4.$$

I. $\quad f_1(y, z) = (y^2 + z^2)^2 - 2y^2z^2 \leqslant (y^2 + y^2)^2 \leqslant 16$
и $f_1(y, z) = 16$ при $y^2 + z^2 = 4$ (например, $y = 0,\ z = 2$).

II. $\quad f_2(y, z) = 4 - y^2 - z^2 + y^4 + z^4$ при $y^2 + z^2 \leqslant 4$.

$$f_2(y,\,z) = 4-(y^2+z^2)+y^4+z^4 = 4-(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-2y^2z^2$$

$$= 4-(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-2y^2z^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$$

$$= 4+\left[(y^2+z^2)-\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}-2y^2z^2$$

$$\leqslant \frac{15}{4}+\frac{49}{4}=\frac{64}{4}=16,$$

т. е. $f_2(y,\,z) \leqslant 16$ на $y^2+z^2 \leqslant 4$, при $z^2+y^2=4$, $f_2(y,\,z)=16$, например, при $z=0$ и $y=2$. Значит $\max\limits_{y^2+z^2\leqslant 4} f_2(y,\,z)=16$.

Таким образом, $\max\limits_M f(x,\,y,\,z)=16$.

**Задача 37.** Функция $f(x,\,y,\,z)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $M$, значит по теореме Вейерштрасса она принимает на $M$ наибольшее и наименьшее значения.

1. Найдем наименьшее значение функции $f$ на $M$.

$f(x,\,y,\,z) \geqslant 0$ и в точке $(0,\,0,\,0)$, которая лежит в $M$, $f(0,\,0,\,0)=0$, т. е. $\min\limits_M f(x,\,y,\,z)=0$.

2. Найдем наибольшее значение $f$ на $M$.

*1 способ.* Заметим, что наибольшее значение функция не может принимать в точках, хотя бы одна из координат которых равна нулю, так как $f$ не является нулевой функцией, например, при $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=1$ выполняется $x+2y+z<4$, а $f(1,\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}\neq 0$.

Множество $M$ состоит из четырех пирамидок, по три грани которых лежат в координатных плоскостях, где $f(x,\,y,\,z)=0$. В силу симметрии достаточно исследовать только случай с одной из этих пирамид.

Пусть это будет пирамида в первом октанте, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Внутри пирамиды выполняется $f(x,\,y,\,z)=xyz$,

$$f'_x(x,\,y,\,z)=yz,\quad f'_y=xz,\quad f'_z=xy.$$

Эти производные обращаются в нуль в точках, в которых функция равна 0.

Перейдем на ту часть границы, где $f(x, y, z) \not\equiv 0$, т. е. рассмотрим

$$g(x, y) = f(x, y, 4-x-2y) = xy(4-x-2y)$$

в треугольнике, куда проектируется эта плоскость. Находим точки, где

$$\begin{cases} g'_x(x, y) = 4y - 2xy - 2y^2 = 0, \\ g'_y(x, y) = 4x - x^2 - 4xy = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y(2-x-y) = 0, \\ x(4-x-4y) = 0. \end{cases}$$

Поскольку мы учитываем точки с координатами, не равными нулю, приходим к системе

$$\begin{cases} 2-x-y = 0, \\ 4-x-4y = 0, \end{cases}$$

отсюда $x = \frac{4}{3},\ y = \frac{2}{3}$.

Имеем $g(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$, и точка лежит в треугольнике, в котором мы рассматривали $g(x, y)$.

Значит, $\max\limits_M f(x, y, z) = \frac{32}{27}$.

*2 способ.* Воспользуемся тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не больше их среднего арифметического.

$$|x||2y|z = (\sqrt[3]{|x||2y|z})^3 \leqslant \left(\frac{|x| + 2|y| + z}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}.$$

Тем самым,

$$f(x, y, z) = |x||y|z \leqslant \frac{32}{27},$$

и при $x = y = 1,\ z = \frac{16}{27}$ имеем:

$$f(x, y, z) = \frac{32}{27}, \quad \text{и} \quad x + 2y + z = 3 + \frac{16}{27} < 4.$$

Значит, $\frac{32}{27}$ — это наибольшее значение $f(x, y, z)$ на $M$.

**Задача 41.**

1. Исследуем поточечную сходимость ряда.

1.1. Имеем $a_n(x) = \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{n^2}$, $a_n(x) > 0$, т. е. ряд со знакочередующимися членами.

1.2. Найдем все $x$, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = 0$:

$$\sqrt[n]{3} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{n}} - 1 \sim \frac{\ln 3}{n}, \quad n \to \infty,$$

$$\frac{(\sqrt[n]{3} - 1)^x}{n^2} \sim \frac{(\ln 3)^x}{n^{x+2}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

если $x + 2 > 0$, т. е. $x > -2$.

1.3. При $x \geqslant 0$ имеем $a_n(x) = \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{n^2} \geqslant a_{n+1}(x)$, так как $\sqrt[n]{3} - 1 > \sqrt[n+1]{3} - 1$, значит $a_n(x)$ при $n \geqslant 3$ монотонно убывает по $n$.

Таким образом, при $x \geqslant 0$ исследуемый ряд является рядом Лейбница.

При $x < 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = y^2(\mathrm{e}^{y \ln 3} - 1)^x$$

при $-2 < x < 0$, $y > 0$. Выполняется

$$\varphi'(y) = 2y(\mathrm{e}^{y\ln 3} - 1)^x + y^2 x(\mathrm{e}^{y \ln 3} - 1)^{x-1}\mathrm{e}^{y \ln 3} \ln 3$$

$$= y^2(\mathrm{e}^{y \ln 3} - 1)^{x-1}\left[2\frac{(\mathrm{e}^{y \ln 3} - 1)}{y} + x\mathrm{e}^{y \ln 3} \ln 3\right].$$

При $y \to 0$ имеем

$$\left[2\frac{(\mathrm{e}^{y \ln 3} - 1)}{y} + x\mathrm{e}^{y \ln 3} \ln 3\right] \longrightarrow (2 + x)\ln 3 > 0.$$

Т. е. найдется такое $y_0$, что для всех $y < y_0$ $\varphi'(y) > 0$, значит $\varphi(y)$ монотонно возрастает при $y < y_0$.

Заметим, что $a_n(x) = \varphi(\frac{1}{n})$. Пусть $n_0$ такое, что $\frac{1}{n_0} < y_0$, т. е. $a_n(x)$ при $n \geqslant n_0$ монотонно убывает при $-2 < x < 0$.

Значит, некоторый остаток ряда при каждом $-2 < x < 0$ тоже является рядом Лейбница и поэтому сходится.

Итак, $D(f)\colon x > -2$.

2. Докажем, что $f(x)$ непрерывна на множестве: $x > -2$. Проверим равномерное стремление к нулю $a_n(x)$ на луче: $x \geqslant b > -2\colon a_n(x) = \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^x}{n^2} \leqslant \frac{(\sqrt[n]{3}-1)^b}{n^2}$, так как $\sqrt[n]{3}-1 < 1$ при $n \geqslant 3$. Ранее было показано, что $\left(\frac{\sqrt[n]{3}-1}{n^2}\right)^b$ при $b > -2$ стремится к нулю. Для ряда Лейбница этого достаточно, чтобы ряд равномерно сходился при $x \geqslant b$.

Для любого $x_0 > -2$ найдется такой луч $[b, +\infty)$, что $x_0 \in [b, +\infty)$, и на нем ряд, состоящий из непрерывных $a_n(x)$, сходится равномерно, тогда сумма ряда $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций.

3. Определим знак $f(1)$. Имеем

$$f(1) = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n^2}.$$

Так как это ряд Лейбница, то знак суммы определяется знаком первого члена, т. е. $f(1) < 0$.

Г л а в а 3

# Дифференциальные уравнения

## 3.1. Примеры заданий

1. (2011 — ОЧ) Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 4e^t, \\ \dot{y} = 2x + y - 9t \end{cases}$$

а) найти общее решение;

б) найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = -4, \quad y(0) = 3.$$

2. (2011 — ОЧ) Для уравнения

$$y'' - 2y' + y = e^x + x \sin x$$

а) найти общее решение;

б) найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$$

3. (2011 — ОЧ) Для уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + x \sin x$$

а) найти общее решение;

б) найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(4—10) Найти общее решение дифференциального уравнения

4. (2012 — ОЧ) $y''' - 3y'' = e^{3x} + 3.$

5. (2012 — ОЧ) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} + \cos 3x.$

6. (2013 — ОЧ) $y'' + 2y'' + y' - e^{x} + 2 = 0.$

7. (2013 — ОЧ) $y''' - 2y'' - y' - e^{2x} + x = 0.$

8. (2013 — ОЧ) $y'''' - 6y''' + 9y'' - e^{3x} - x = 0.$

9. (2014 — ОЧ) $y''' - 4y'' + 3y' - x^2 - xe^{2x} = 0.$

10. (2014 — ОЧ) $y''' + y' - \sin x - x\cos x = 0.$

(11—14) Решить задачу Коши

11. (2014 — ОЧ) $y''' - 3y' - 2y - 9e^{2x} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = 3.$

12. (2015 — ОЧ) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2.$

13. (2015 — ОЧ) $y'' - 2y' + 5y = 17\sin 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

14. (2015 — ОЧ) $y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}\cos x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$

## 3.2. Решения

**Задача 1.**

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 4e^{t}, \\ \dot{y} = 2x + y - 9t, \\ x(0) = -4, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

*1 способ.* Данная линейная неоднородная система может быть сведена к линейному уравнению второго порядка следующим образом. Рассмотрим первое уравнение системы и продифференцируем его по $t$, что можно сделать, поскольку правая часть уравнения представляет собой сумму дифференцируемых функций, а значит, и левая также дифференцируема по $t$:

$$\begin{gathered}\ddot{x} = \dot{x} + 2\dot{y} + 4e^t \\ = [\text{из второго уравнения } \dot{y} = 2x + y - 9t] \\ = \dot{x} + 4x + 2y - 18t + 4e^t \\ = [\text{из первого уравнения } 2y = \dot{x} - x - 4e^t] \\ = \dot{x} + 4x + \dot{x} - x - 4e^t - 18t + 4e^t.\end{gathered}$$

После приведения подобных получим уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = -18t.$$

1. Решим сначала линейное однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ и найдем его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$.

2. Правая часть уравнения представляет собой действительный квазимногочлен, поэтому частное решение уравнения следует искать в виде $x_1(t) = A_0 + A_1t$. Коэффициенты $A_0$ и $A_1$ определяются путем подстановки $x_1$ в уравнение: $A_1 = 6$, $A_0 = -4$. Тогда $x_1(t) = -4 + 6t$. Общее решение уравнения $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - 4 + 6t$.

3. Определим вторую компоненту решения системы $y = \frac{1}{2}(\dot{x} - x - 4e^t) = \frac{1}{2}(3C_1e^{3t} - C_2e^{-t} + 6 - C_1e^{3t} - C_2e^{-t} + 4 - 6t - 4e^t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} + 5 - 3t - 2e^t$.

4. Таким образом, общее решение системы имеет вид $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - 4 + 6t$, $y = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} + 5 - 3t - 2e^t$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:
$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 4 = -4, \\ y(0) = C_1 - C_2 + 5 - 2 = 3. \end{cases}$$
Отсюда $C_1 = C_2 = 0$.

**Ответ:** $x = -4 + 6t$, $y = 5 - 3t - 2e^t$.

*2 способ.* 1. Выпишем матрицу системы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0,$$
следовательно, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \binom{h_1}{h_2}$, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = 3$, найдем из системы $(A - \lambda_1 E)\mathbf{h}_1 = 0$, при этом $rank(A - \lambda_1 E) = 1$:
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -2h_1 + 2h_2 = 0.$$
Отсюда $h_1 = h_2 = 1$, $\mathbf{h}_1 = \binom{1}{1}$. Аналогично получим собственный вектор $\mathbf{h}_2 = \binom{1}{-1}$, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = -1$.

Тогда общее решение линейной однородной системы имеет вид
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. В правых частях уравнений системы стоят различные действительные квазимногочлены. Принимая во внимание

принцип суперпозиции, сначала найдем частное решение для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 4e^t, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} B_0 e^t \\ C_0 e^t \end{pmatrix}.$$

Подставляя решение в таком виде в систему, определяем $B_0 = 0$, $C_0 = -2$. Теперь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

Далее, найдем частное решение для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y - 9t \end{cases}$$

в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} D_0 + D_1 t \\ E_0 + E_1 t \end{pmatrix}.$$

Подставляя решение в систему, определяем $D_0 = -4$, $D_1 = 6$, $E_0 = 5$, $E_1 = -3$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} -4 + 6t \\ 5 - 3t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -4 + 6t \\ 5 - 3t - 2e^t \end{pmatrix}.$$

Решение задачи Коши с начальными условиями $x(0) = -4$, $y(0) = 3$ получается при значениях $C_1 = C_2 = 0$.

**Ответ:** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 6t \\ 5 - 3t - 2e^t \end{pmatrix}.$

**Задача 2.** $y'' - 2y' + y = e^x + x\sin x, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$

1. Характеристическое уравнение, соответствующее линейному однородному уравнению, $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

2. Правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух действительных квазимногочленов. Чтобы найти частное решение, воспользуемся принципом суперпозиции, рассмотрев отдельно уравнения с правыми частями $f_1 = e^x$ и $f_2 = x\sin x$. Частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^x$ следует искать в виде $y_1 = A_0 x^2 e^x$, поскольку $\gamma = 1$ — корень характеристического уравнения кратности 2. Постоянную $A_0$ найдем, подставив $y_1$ в уравнение. Имеем $y_1' = 2A_0 x e^x + A_0 x^2 e^x$, $y_1'' = 2A_0 e^x + 4A_0 x e^x + A_0 x^2 e^x$, тогда $2A_0 e^x + 4A_0 x e^x + A_0 x^2 e^x - 4A_0 x e^x - 2A_0 x^2 e^x + A_0 x^2 e^x = e^x$, откуда $2A_0 = 1$, следовательно, $A_0 = \frac{1}{2}$ и $y_1 = \frac{1}{2} x^2 e^x$.

3. Квазимногочлену $f_2$ отвечает число $\gamma = i$, не являющееся корнем характеристического уравнения (т. е. $s = 0$), множителем при синусе в $f_2$ стоит многочлен 1-й степени, поэтому частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = x\sin x$ следует искать в виде $y_2 = (B_0 + B_1 x)\cos x + (D_0 + D_1 x)\sin x$. Методом неопределенных коэффициентов находим $B_1$, $B_2$, $D_1$, $D_2$: $y_2' = -(B_0 + B_1 x)\sin x + B_1\cos x + D_1 \sin x + (D_0 + D_1 x)\cos x$, $y_2'' = -(B_0 + B_1 x)\cos x - 2B_1 \sin x + 2D_1\cos x - (D_0 + D_1 x)\sin x$. Подставляем $y_2$, $y_2'$, $y_2''$ в уравнение. Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получаем систему:

$$\begin{cases} 2D_1 - B_1 - D_0 &= 0, \\ D_1 &= 0, \\ 2B_0 - 2D_1 - 2B_1 &= 0, \\ 2B_1 &= 1. \end{cases}$$

Отсюда $D_1 = 0$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_0 = \frac{1}{2}$, $D_0 = -\frac{1}{2}$, следовательно, $y_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}(1+x)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

4. Далее найдем частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$. Имеем $y(0) = C_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, тогда $C_1 = 0$, $y' = C_2e^x + C_2xe^x + xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}\cos x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x)\sin x - \frac{1}{2}\cos x$, $y'(0) = C_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, следовательно, $C_2 = 0$.

**Ответ:** $y = \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}(1+x)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

**Задача 4.** $y''' - 3y'' = e^{3x} + 3$.

1. Выписываем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$, определяем его корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 3$ и получаем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y = C_1 + C_2x + C_3e^{3x}$.

2. Частное решение уравнения с правой частью $e^{3x}$ ищем в виде $y_1 = A_0xe^{3x}$, поскольку $\gamma = 3$ — корень характеристического уравнения кратности 1. Чтобы определить $A_0$, вычислим $y_1' = 3Axe^{3x} + Ae^{3x}$, $y_1'' = 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x}$, $y_1''' = 27Axe^{3x} + 27Ae^{3x}$ и подставим $y_1$ в исходное уравнение. Получим $A_0 = \frac{1}{9}$, тогда $y_1 = \frac{1}{9}xe^{3x}$.

3. Частное решение уравнения с правой частью 3 следует искать в виде $y_2 = B_0x^2$, так как $\gamma = 0$ — корень характеристического уравнения кратности 2. Подставляем $y_2$ в уравнение и определяем $B_0 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $y_2 = -\frac{1}{2}x^2$.

**Ответ:** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{1}{2}x^2$.

**Задача 9.** $y''' - 4y'' + 3y' - x^2 - xe^{2x} = 0$.

1. Решим соответствующее линейное однородное уравнение $y''' - 4y'' + 3y' = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$ являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x}$.

2. Найдем частное решение уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$. Действительному квазимногочлену $f_1(x) = x^2$ отвечает $\gamma = 0$, совпадающее с одним корнем характеристического уравнения ($s = 1$). Степень многочлена $m = 2$. Поэтому частное решение $y_1$ ищем в виде: $y_1(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_2 x^3 + A_1 x^2 + A_0 x$. Подставляя $y_1(x)$ в уравнение, получаем $6A_2 - 24A_2 x - 8A_1 + 9A_2 x^2 + 6A_1 x + 3A_0 = x^2$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6A_2 - 8A_1 + 3A_0 & = & 0, \\ -24A_2 + 6A_1 & = & 0, \\ 9A_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Отсюда $A_2 = \frac{1}{9}$, $A_1 = 4A_2 = \frac{4}{9}$, $A_0 = \frac{26}{27}$. Тогда $y_1(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x$.

3. Найдем частное решение уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = xe^{2x}$. Поскольку $\gamma = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$. Степень многочлена при экспоненте в правой части уравнения $m = 1$. Частное решение $y_2$ ищем в виде: $y_2(x) = (B_0 + B_1 x)e^{2x}$. Постоянные $B_0$ и $B_1$ определяются путем подстановки $y_2(x)$ в уравнение. Находим $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_0 = \frac{1}{4}$. Следовательно, $y_2(x) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^{2x}$.

**Ответ:** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^{2x}$.

Г л а в а 4

# Теория вероятностей

## 4.1. Примеры заданий

1. (2011 — ОЧ) При каком числе бросаний правильной монеты можно с вероятностью 0,95 утверждать, что отклонение относительной частоты выпадения герба от 0,5 не превзойдет 0,1?
(Φ(1,96) = 0,475, Φ(3) = 0,49865, Φ(4) = 0,4999968, Φ(5) = 0,49999997)

2. (2013 — ОЧ) В текущем учебном году в университет набрали 2500 студентов. Известно, что в среднем один из пяти будет отчислен на первых двух курсах. Какова вероятность того, что число студентов из этого набора на третьем курсе будет меньше 1940?
(Φ(1,96) = 0,475, Φ(3) = 0,49865, Φ(4) = 0,4999968, Φ(5) = 0,49999997)

3. (2013 — ОЧ) При вычислении интеграла
$$p = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$
методом Монте-Карло точка $(X_k, Y_k)$ бросается $n$ раз наудачу в единичный квадрат. Пусть $\mu_n$ — количество попаданий ниже параболы $y = x^2$. Найти абсолютную погрешность метода, которую мы можем гарантировать с вероятностью 0,95. Т. е. найти такое $\varepsilon$, для которого $P = P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| < \varepsilon\} = 0{,}95$. Здесь $n = 800$.
(Φ(1,96) = 0,475, Φ(3) = 0,49865, Φ(4) = 0,4999968, Φ(5) = 0,49999997)

4. (2013 — ОЧ) В городе 1000 любителей кино и 4 кинотеатра. Каждый вечер любитель кино выбирает наудачу один из кинотеатров. Сколько мест должно быть в каждом кинотеатре, чтобы с вероятностью не менее 0,99 любитель кино мог попасть в выбранный им кинотеатр?
($\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(2,34) = 0{,}49$, $\Phi(3) = 0{,}49865$, $\Phi(5) = 0{,}49999997$)

5. (2014 — ОЧ) Игральная кость бросается 100 раз. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков отклонится от 350 более чем на 51?
($\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(3) = 0{,}49865$, $\Phi(4) = 0{,}4999968$, $\Phi(5) = 0{,}49999997$)

6. (2014 — ОЧ) Какова вероятность того, что при 100 бросаниях игральной кости относительная частота выпадения шестерки отклонится от $\frac{1}{6}$ менее чем на 0,15?
($\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(3) = 0{,}49865$, $\Phi(4) = 0{,}4999968$, $\Phi(5) = 0{,}49999997$)

7. (2014 — ОЧ) Пусть $Z$ — это случайная величина, имеющая распределение $\chi^2$ Пирсона с 50 степенями свободы. Какова вероятность того, что значение такой случайной величины будет отклоняться от 50 более чем на 30 единиц? (Указание: случайная величина $Z$ представима в виде суммы 50 независимых слагаемых, каждое из которых является квадратом нормальной случайной величины с нулевым матожиданием и единичной дисперсией)
($\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(3) = 0{,}49865$, $\Phi(4) = 0{,}4999968$, $\Phi(5) = 0{,}49999997$)

8. (2015 — ОЧ) В институте учится 1200 студентов. Каждый четвертый не заканчивает обучение. Какова вероятность того, что из тех, кто учится, будет отчислено более 330 студентов?
($\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(3) = 0{,}4987$)

9. (2015 — ОЧ) На курсе учится 162 студента. Приглашенный лектор собирается прочитать на этом курсе лекцию. Сколько мест должно быть в зале, чтобы рассадить всех пришедших студентов с вероятностью 0,95, если каждый третий студент решил пропустить это мероприятие?
$(\Phi(1{,}65) = 0{,}45,\ \Phi(1{,}96) = 0{,}475,\ \Phi(2) = 0{,}4772,\ \Phi(3) = 0{,}4987)$

10. (2015 — ОЧ) В самолете 150 мест, в среднем 10 % пассажиров, заказавших билет, им не пользуются. Сколько «лишних» билетов можно продать («овербукинг»), чтобы с вероятностью 0,95 самолет был полон?
$(\Phi(1{,}65) = 0{,}45,\ \Phi(1{,}96) = 0{,}475,\ \Phi(2) = 0{,}4772,\ \Phi(3) = 0{,}4987)$

## 4.2. Решения

**Задача 1.** Вероятность того, что отклонение относительной частоты выпадения герба от $p = 0{,}5$ не превзойдет 0,1, равна 0,95:

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \leqslant 0{,}1\right\} = 0{,}95.$$

Домножим неравенство на $n$ и поделим на $\sigma = \sqrt{npq}$: $P\{|\mu_n - np| \leqslant 0{,}1n\} = 0{,}95$, $P\left\{\left|\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \leqslant 0{,}1\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = 0{,}95$. Вероятность данного события равна удвоенной функции Лапласа от $\frac{\varepsilon n}{\sigma}$: $2\Phi\{0{,}1\sqrt{\frac{n}{pq}}\} \approx 0{,}95$, $\Phi\{0{,}1\sqrt{\frac{n}{pq}}\} \approx 0{,}475$.

Аргумент функции Лапласа при значении 0,475 равен 1,96: $0{,}1\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 1{,}96$, $\sqrt{n} \approx \frac{1{,}96\sqrt{pq}}{0{,}1}$.

Находим $n$: $n \approx (1{,}96)^2 pq \cdot 100 = (1{,}96)^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 100 = 96$.

**Задача 7.** Случайная величина $Z$ представима в виде суммы 50 независимых слагаемых, каждое из которых является квадратом нормальной случайной величины с нулевым матожиданием и единичной дисперсией:

$$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad MZ=n=50, \quad DZ=2n=100.$$

Необходимо найти вероятность того, что значение $Z$ будет отклоняться от 50 более чем на 30 единиц:

$$P\{|Z-MZ|>30\}$$

$$=P\left\{\frac{|Z-MZ|}{\sqrt{DZ}}>3\right\}\approx 1-2\Phi\{3\}=1-2\cdot 0{,}49865=0{,}0027.$$

**Задача 8.** Пусть $\mu_n$ обозначает количество отчисленных, $n=1200$, $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{4}$. Тогда

$$P\{\mu_n>330\}=P\left\{\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}>\frac{330-300}{15}\right\}=0{,}5-0{,}4772=0{,}0228.$$

# Глава 5
# Дискретная математика

## 5.1. Примеры заданий

1. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Начинающий снайпер десятью выстрелами по мишени выбил 44 очка из 100, попав в молоко не более одного раза. Докажите, что какие-то два из его выстрелов были одинаково успешными.

2. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) На рулетке казино «Rainbow» в Лас-Вегасе каждый сектор от 0 до 36 раскрашен в один из цветов радуги. Докажите, что на рулетке есть либо 7 секторов одного цвета, либо 7 секторов разных цветов.

3. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Докажите, что из любых пяти натуральных чисел можно выбрать три числа так, чтобы их сумма делилась на 3.

4. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Детерминированный конечный неполный автомат $A$ распознает язык $(a + aa)(ab)^*$. В приведенной таблице переходов автомата $A$ ($s$ – начальное состояние, $f$ – заключительное) пропущен один переход. Найдите его.

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | $s$ |
| 2 | 3 | | $f$ |
| 3 | 4 | | $f$ |
| 4 | | 5 | |
| 5 | 4 | | $f$ |

5. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Для конечного автомата, заданного таблицей переходов

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 4 |

укажите кратчайшее слово, переводящее любое состояние в состояние 1.

6. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Для конечного автомата, заданного таблицей переходов

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 |

укажите кратчайшее слово, переводящее любое состояние в состояние 1.

7. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Таблица истинности булевой функции трех переменных содержит ровно три единицы. Какое минимальное количество одночленов может быть в полиноме Жегалкина этой функции?

8. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Таблица истинности булевой функции трех переменных содержит ровно три нуля. Какое минимальное количество одночленов может быть в полиноме Жегалкина этой функции?

9. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Задайте регулярным выражением язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом со следующей таблицей переходов ($s$ — начальное состояние, $f$ — заключительное):

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3 | | $sf$ |
| 2 | 2 | 3 | $f$ |
| 3 | 3 | 2 | |

10. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Задайте регулярным выражением язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом со следующей таблицей переходов ($s$ — начальное состояние, $f$ — заключительное):

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2, 3 | | $sf$ |
| 2 | 2 | 1, 3 | $f$ |
| 3 | 2 | | $s$ |

11. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Пусть $A$ — матрица смежности неориентированного графа $G$. Докажите, что $(A^2)[i, i] = 0$ тогда и только тогда, когда $i$ — изолированная вершина в $G$.

12. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Пусть $A$ — матрица смежности ориентированного графа $G$ с $n$ вершинами. Докажите, что $(A^n) = 0$ тогда и только тогда, когда граф $G$ ацикличен.

13. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) На ленте одноленточной машины Тьюринга символы **0** обозначают пустые ячейки, а все непустые ячейки содержат символ **1**. Соответственно, такая машина оперирует числами в унарной записи: число $N$ записывается последовательностью из $N$ единиц. Постройте детерминированную машину, которая вычитает из натурального числа единицу. В начале и в конце работы машина видит самую левую единицу на ленте, если на ней есть единицы.

14. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) На ленте одноленточной машины Тьюринга символы **0** обозначают пустые

ячейки, а все непустые ячейки содержат символ **1**. Соответственно, такая машина оперирует числами в унарной записи: число $N$ записывается последовательностью из $N$ единиц. Постройте детерминированную машину, которая вычисляет для натурального числа $N$ функцию $N \bmod 2$. В начале и в конце работы машина видит самую левую единицу на ленте, если на ней есть единицы.

15. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Найдите кратчайшую ДНФ, эквивалентную булевой формуле $(z \vee \bar{y}) \oplus (z \vee (x \wedge y))$.

16. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Найдите кратчайшую ДНФ, эквивалентную булевой формуле $(x \vee z) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge (\bar{y} \vee z))$.

17. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Найдите кратчайшую ДНФ, эквивалентную булевой формуле $(x \oplus (z \vee y)) \leftrightarrow (\bar{y} \oplus (x \wedge z))$.

18. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Детерминируйте конечный автомат, заданный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| $\to$1 | 1, 3 | 2 | $\to$ |
| $\to$2 | 3 | 2 | |
| 3 | | 1 | |

19. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Детерминируйте конечный автомат, заданный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| $\to$1 | 1, 3 | 2 | |
| $\to$2 | | 2 | $\to$ |
| 3 | 1, 2 | | |

20. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Детерминируйте конечный автомат, заданный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| $\to$1 | | 1, 3 | |
| $\to$2 | 1, 3 | 2 | |
| 3 | 2 | | $\to$ |

21. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Найдите число различных нетождественно ложных трехместных предикатов на трехэлементном множестве.

22. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) На трехэлементном множестве найдите число различных двухместных предикатов со следующим свойством: навешиванием одного квантора предикат можно сделать тождественно истинным.

23. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Найдите число различных нетождественно истинных двухместных предикатов на четырехэлементном множестве.

24. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Запишите какое-нибудь регулярное выражение, задающее тот же язык, что и недетерминированный конечный автомат, представленный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\to$1 | 1, 2 | | 1 | $\to$ |
| $\to$2 | 2 | 1 | 1 | |

25. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Запишите какое-нибудь регулярное выражение, задающее тот же язык, что и недетерминированный конечный автомат, представленный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\to$1 | | 1, 2 | 1, 2 | $\to$ |
| $\to$2 | 1 | 1, 2 | | $\to$ |

26. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Запишите какое-нибудь регулярное выражение, задающее тот же язык, что и недетерминированный конечный автомат, представленный таблицей переходов:

| | $a$ | $b$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\to$1 | | 1, 2 | 1 | $\to$ |
| $\to$2 | 1 | 2 | 2 | |

## 5.2. Решения

**Задача 3.** Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ — различные пять натуральных чисел и $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in \{0, 1, 2\}$ — их остатки от деления на 3 соответственно. Возможны следующие два случая: а) среди чисел $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ есть хотя бы три одинаковых, тогда сумма этих трех чисел делится на 3; б) среди чисел $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, $r_5$ нет трех одинаковых, а значит, найдутся три различных числа, имеющие остатки 0, 1 и 2, и тогда их сумма делится на 3.

**Задача 4.** Имеющийся автомат распознает только слово $a$ и слова $aa(ab)^*$, т. е. необходимо добавить переход для распознавания слов вида $a(ab)^n$ при $n > 0$. Так как автомат детерминированный, единственный вариант — переход из 3 в 5 с меткой $b$ (см. диаграмму на рис. 5.1).

**Задача 5.** Построим диаграмму состояний автомата (см. рис. 5.2). Проверяя слова по диаграмме на рис. 5.2, начиная со слов единичной длины, получаем ответ: $bba$.

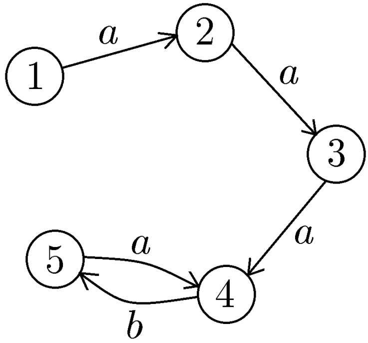


Рис. 5.1. Диаграмма автомата к решению задачи 4

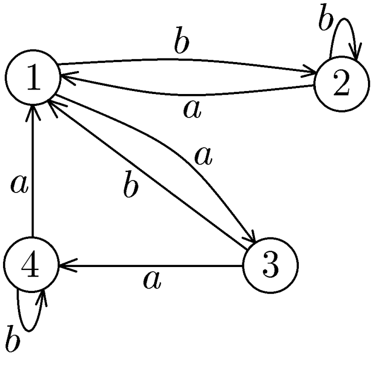


Рис. 5.2. Диаграмма автомата к решению задачи 5

**Задача 7.** Так как количество единиц в таблице истинности функций $x$, $xy$, $xyz$ равно, соответственно, 4, 2 и 1, то полиномов Жегалкина с единственным одночленом и тремя единицами в таблице не существует. Из двух одночленов требуемый полином легко строится, например, $x + xyz$.

**Задача 9.** Пусть $L_i$ — язык всех слов, читаемых автоматом от начального состояния до состояния $i$. Тогда автомат распознает язык $L = L_1 + L_2$. Запишем:

$$\begin{cases} L_1 = a^*, \\ L_2 = L_1 a + L_2 a + L_3 b, \\ L_3 = L_1 a + L_2 b + L_3 a. \end{cases}$$

Решаем линейную систему, используем то, что линейное уравнение $L = LU + V$ имеет решение $L = VU^*$:

$$L_3 = (aa^* + L_2 b)a^*,$$

$$L_2 = aa^* + L_2 a + (aa^* + L_2 b)a^* b$$

$$= aa^* + aa^* b + L_2(a + ba^* b) = (aa^* + aa^* b)(a + ba^* b)^*.$$

**Задача 11.** Если вершина $i$ соединена в $G$ ребром с вершиной $j$, то $A[i, j] = A[j, i] = 1$, откуда $A^2[i, i] = ... + A[i, j]A[j, i] + ... > 0$. Если же $i$ изолирована, то при вычислении $A^2[i, i]$ нулевая строка умножается на нулевой столбец.

**Задача 14.** Если вначале машина видит 0, она сразу останавливается ($0 \mod 2 = 0$). Если видит 1 — движется вправо, стирая все единицы и запоминая четность числа стертых единиц (состояния $q_0$ и $q_1$).

$$s, 0 \mapsto t, 0$$

$$s, 1 \mapsto q_1, 0, R$$

$$q_1, 1 \mapsto q_0, 0, R$$

$$q_1, 0 \mapsto t, 1$$

$$q_0, 1 \mapsto q_1, 0, R$$

$$q_0, 0 \mapsto t, 0$$

**Задача 15.** Строим карту Карно для формулы трех переменных. Поскольку формула имеет вид $A \oplus B$, удобно построить карту для $A$, карту для $B$, а потом выбрать ячейки, в которых истинна одна из $A$, $B$:

| | $y$ | $\bar{y}$ | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $AB$ | $AB$ | $z$ |
| $x$ | $B$ | $A$ | $\bar{z}$ |
| $\bar{x}$ | | $A$ | $\bar{z}$ |
| $\bar{x}$ | $AB$ | $AB$ | $z$ |

Отсюда получим таблицу:

| | $y$ | $\bar{y}$ | |
|---|---|---|---|
| $x$ | | | $z$ |
| $x$ | 1 | 1 | $\bar{z}$ |
| $\bar{x}$ | | 1 | $\bar{z}$ |
| $\bar{x}$ | | | $z$ |

Построение кратчайшей ДНФ по карте Карно дает $x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$ (первая и вторая элементарные конъюнкции соответствуют горизонтальному и вертикальному прямоугольникам из единиц на карте).

**Задача 18.** Строим автомат на всех подмножествах множества состояний, достижимых из начального подмножества $\{1, 2\}$, объединяющего все начальные вершины исходного автомата:

| | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|
| $\to \{1,\ 2\}$ | $\{1,\ 3\}$ | $\{2\}$ | $\to$ |
| $\{1, 3\}$ | $\{3\}$ | $\{1,\ 2\}$ | $\to$ |
| $\{2\}$ | | $\{2\}$ | |
| $\{3\}$ | $\{3\}$ | $\{1\}$ | $\to$ |
| $\{1\}$ | $\{1,\ 3\}$ | $\{2\}$ | $\to$ |

**Задача 21.** Чтобы задать предикат, надо указать его значение (0 или 1) на каждом из $3^3 = 27$ упорядоченных троек, составленных из элементов множества. Значит, всего предикатов $2^{27}$, тождественно ложный предикат один, получаем ответ $2^{27} - 1$.

Глава 6

# Графы и комбинаторные алгоритмы

## 6.1. Примеры заданий

1. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В небольшом городке началось строительство метрополитена. Особенностью городка является то, что он стоит на маленьких островах, некоторые из которых соединены тоннелями или мостами. По убеждению мэра метро должно быть проложено под землей, поэтому в проекте строительства должно использоваться как можно меньше мостов. Единственное требование, которое предъявляется к метрополитену, заключается в том, чтобы жители города могли добраться на метро (возможно, с пересадками) с любого острова на любой другой. К счастью, известно, что мостов и тоннелей для этого достаточно. Из соображений экономии было решено построить как можно меньше переездов между островами. Список пар островов с указанием соединяются ли они мостом или тоннелем известен. Требуется определить минимально возможное количество мостов, которые необходимо задействовать при строительстве метрополитена.

   Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

2. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Имеется набор типов монет достоинством в $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ центов. Требуется набрать сумму в $N$ центов, используя наименьшее количество монет. Предполагается, что набора монет достаточно.

Рассмотрим жадный алгоритм.

1. Упорядочим типы монет по убыванию.

2. До тех пор, пока сумма $N$ не набрана: выбирать максимально возможное количество монет наибольшего достоинства из еще неиспользованных типов.

Приведите набор типов монет, для которого жадный алгоритм не дает оптимального решения.

3. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В стране $N$ городов, некоторые из которых соединены между собой дорогами. Для того чтобы проехать по одной дороге, требуется один бак бензина. Дороги двусторонние. В каждом городе бак бензина имеет разную стоимость. Требуется добраться из города $A$ в город $B$, потратив как можно меньшее количество денег.

   Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм, который определил бы самый экономный маршрут от $A$ до $B$.

4. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Задан набор из $n$ вещей, для каждой вещи задан ее вес в килограммах и ценность в рублях. Дан рюкзак, максимальная вместимость которого $P$ килограммов. Все числа целые. Требуется сложить в рюкзак вещи так, чтобы ценность была максимальной, но общий вес не превосходил $P$.

   Рассмотрим жадный алгоритм упаковки рюкзака.

   1. Считаем рюкзак пустым.

   2. Сформировать из вещей ОЧЕРЕДЬ по убыванию ценностей.

   3. Пока ОЧЕРЕДЬ $\neq \varnothing$. Считать очередную вещь из ОЧЕРЕДЬ, удалить ее из ОЧЕРЕДЬ. Если выбранная вещь входит в рюкзак, т. е. ее вес и вес всех уже имеющихся в рюкзаке вещей в сумме не превосходят $P$, то добавить эту вещь в рюкзак.

   Приведите пример, когда этот алгоритм не дает оптимального результата.

5. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В городе $M$ трамвайных маршрутов, каждый маршрут описывается набором остановок. Всего в городе имеется $N$ остановок. Стоимость проезда на всех маршрутах одинакова, не зависит от количества остановок и равна 1 у. е. Каждый билет действителен только в одну сторону движения трамвая, т. е. если надо проехать от остановки $X$ до остановки $Y$, то для возвращения из $Y$ в $X$ нужно купить новый билет. Требуется добраться от остановки $A$ до остановки $B$, затратив как можно меньше денег.

   Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм, который определил бы самый экономный маршрут от $A$ до $B$.

6. (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Рассмотрим следующий алгоритм построения наибольшего по числу ребер паросочетания в двудольном графе.
   1. Начать с пустого паросочетания, т. е. $M := \varnothing$.
   2. Сформировать из ребер ОЧЕРЕДЬ в произвольном порядке.
   3. Пока ОЧЕРЕДЬ $\neq \varnothing$. Считать очередное ребро $e$ из ОЧЕРЕДЬ, удалить его из ОЧЕРЕДЬ. Если $e$ не пересекается ни с одним ребром из $M$, то добавить его к $M$.

   Приведите пример, когда этот алгоритм не построит наибольшее по числу ребер паросочетание.

7. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ)
   *— А и Б сидели на трубе, А упало, Б – пропало. Чему равен диаметр трубы?*
   *— Двум радиусам!*
   Пусть $G = (V, E)$ – граф. Для каждой вершины $v$ графа $G$ через $r(v)$ обозначим наибольшее расстояние от $v$ до всех остальных вершин графа, при этом число $r(v)$ называется *эксцентриситетом* вершины $v$. Вершина с наименьшим эксцентриситетом называется *центром* графа, а ее эксцентриситет — *радиусом*. Наибольшее из

всех попарных расстояний между вершинами называется *диаметром* графа. Пусть $R(G)$ — радиус, а $D(G)$ — диаметр графа. Приведите пример графа $G$, для которого $D(G) \neq 2R(G)$.

8. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Как известно, в Китае, а также еще в некоторых странах, во всех банках страны одинаковый курс валют. Пусть в подобной стране ходит $N$ валют и для каждой пары валют $(i, j)$ задан курс $c(i, j)$ $j$-й валюты по отношению к $i$-й, т. е. количество единиц $j$-й валюты, получаемой при продаже одной единицы $i$-й. Например, пусть $i$ — это рубль, а $j$ – доллар. Тогда, возможно, $c(i, j) = \frac{1}{33}$, а $c(j, i) = 32{,}5$. Некто имеет валюту $i_1$, а ему нужно осуществить платеж в валюте $i_k$. Конечно, можно сразу перевести валюту $i_1$ в валюту $i_k$, но можно вначале перевести валюту $i_1$ в валюту $i_2$, а затем ее в валюту $i_k$, и истратить на осуществление платежа меньшее количество валюты $i_1$. Предполагается, что невозможно провести многоходовую комбинацию, переводя валюту $i_1$ в валюту $i_2$, затем в $i_3$ и т. д., вернувшись в конце концов к валюте $i_1$, и получить на этом выигрыш. Итак, для заданной пары валют $A$ и $B$ требуется найти самый выгодный вариант перевода валюты $A$ в валюту $B$.

   Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^3)$.

9. (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Пусть $G = (V, E)$ — граф. Для каждой вершины $v$ графа $G$ через $r(v)$ обозначим наибольшее расстояние от $v$ до всех остальных вершин графа, при этом число $r(v)$ называется *эксцентриситетом* вершины $v$. Вершина с наименьшим эксцентриситетом называется *центром* графа. Приведите пример графа $G$, имеющего не менее двух центров.

10. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Милиционеры упустили преступника — он скрылся от них в запутанной сетке линий Екатеринбургского метрополитена, где преследование лишено всякого смысла. Преступник не знает о том, что на его одежде радиомаяк, который дает сигнал в милицию с каждой станции, которую посещает или проезжает преступник (в тоннелях между станциями запеленговать преступника невозможно, сигнал маяка для этого слишком слаб). Получая информацию о последовательности станций, которые проезжает преступник, милиционеры хотят сузить круг поисков: установить, на какие станции преступник может отправляться, чтобы установить дежурные посты именно на этих станциях. Милиционерам известно, что преступник ведет себя вполне логично: скрывшись в метро, он сразу наметил себе цель (ту станцию, около которой расположено его укрытие) и движется туда по какому-либо из кратчайших путей. Длина пути с точки зрения преступника определяется исключительно количеством перегонов на пути и не зависит ни от длины перегонов, ни от количества пересадок. Задано описание линий метро как последовательности номеров станций. Требуется вывести номера станций, к которым может направляться преступник.

    Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

11. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Пусть в сети $G$ есть ребра с отрицательными весами и нет контуров отрицательной длины. Рассмотрим следующий алгоритм нахождения кратчайшего пути от заданной вершины $s$ до заданной вершины $t$.

    1. Пусть $K$ — максимум из абсолютных величин весов ребер.

2. Рассмотрим сеть Γ на том же множестве вершин, но веса всех ребер увеличим на число $K$. Получим сеть с неотрицательными весами.
3. Используя стандартный алгоритм Дейкстры, найдем кратчайший путь в Γ от $s$ до $t$.
4. Найденный путь является ответом.

Приведите пример, когда этот алгоритм неправильно определит кратчайший $(s, t)$-путь в $G$.

12. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Сложный механизм состоит из $N$ шестеренок, пронумерованных натуральными числами от 1 до $N$. Заданы $M$ соединений пар шестеренок в виде $(i,\ j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant N$ (шестерня с номером $i$ находится в зацеплении с шестерней $j$). Как узнать, можно ли повернуть шестерню с номером 1?

    Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

13. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В ориентированном графе без кратных ребер и петель задана списком вершин цепь $p$. Требуется построить такую ее подцепь $q$, что:
    • начальные и конечные вершины цепей $p$ и $q$ совпадают;
    • ребра в цепи $q$ идут в том же порядке, что и в цепи $p$;
    • цепь $q$ имеет наименьшее возможное число ребер при данных условиях.

    Рассмотрим следующий алгоритм. Считываем вершины, как только встречается цикл (вершина встретилась второй раз), его удаляем. Оставшуюся цепь выдаем в качестве ответа.

Пример
**Исходные данные**
1, 2, 3, 4, 2, 5
**Результат**
1, 2, 5
Для данного примера алгоритм выдаст правильный ответ. Приведите пример, когда этот алгоритм выдаст неправильный ответ.

14. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Информационная сеть связывает $N$ пунктов связи. Для каждого канала $(i, j)$ известна вероятность $p(i, j)$ правильной передачи информации от пункта $i$ до пункта $j$, при этом $p(i, j) = p(j, i)$ и вероятности правильной работы каналов не зависят друг от друга. Требуется передать сообщение от заданного пункта $A$ до заданного пункта $B$ по самому надежному пути, т. е. такому, где вероятность искажения сигнала наименьшая.

    Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^2)$.

15. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Пусть дано конечное множество $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и семейство подмножеств $F = \{S_1, \ldots, S_m\}$ множества $U$. Известно, что объединение всех множеств семейства $F$ совпадает с множеством $U$. Требуется решить задачу о покрытии множествами, т. е. найти минимальное количество подмножеств множества $U$ из семейства $F$, покрывающее множество $U$. Рассмотрим алгоритм, который на каждом шаге выбирает подмножество из семейства $F$, покрывающее максимальное число элементов множества $U$, и повторяющий этот шаг до тех пор, пока все элементы множества $U$ не окажутся покрытыми.

Приведите пример множества $U$ и семейства $F$, когда предложенный алгоритм построит неоптимальное покрытие исходного множества подмножествами.

16. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) МЧС понадобилось срочно перебросить большую партию грузов из пункта $A$ в пункт $B$ по железным дорогам. Из $A$ в $B$ ведут несколько различных веток, при этом на путях имеются узловые станции $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Число товарных поездов которые могут пройти по линиям от $T_i$ к $T_j$ за один день ограничено и задается таблицей $C_{ij}$ (значения $C_{ij}$ и $C_{ji}$ могут различаться). Кроме того, для каждой узловой станции $T_i$ задано $K_i$ — максимально возможное число поездов, которое может пройти через нее за один день.
    Как найти максимально возможное число поездов, которые за один день могут пройти от пункта $A$ до пункта $B$?

    Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения полиномиальной сложности.

17. (2014 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Множество вершин графа $W$, такое, что каждое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из $W$, называется *вершинным покрытием*. Рассмотрим следующий алгоритм: взять вершину наибольшей степени, добавить ее в покрытие, удалить все смежные ей ребра. Продолжать этот процесс до полного исчерпания множества вершин.

    Приведите пример, когда этот алгоритм не обеспечит построения минимального (по мощности) вершинного покрытия.

18. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В заданном взвешенном ориентированном графе с положительными весами найти кратчайший путь от заданной вершины $s$ до заданной вершины $t$.

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Считать множество $P$ достижимых из $s$ вершин пустым, т. е. $P := \varnothing$.

2. Считать $s$ достижимой вершиной, т. е. добавить $s$ к $P$ и положить ПРЕДШЕСТВЕННИК $[s] := 0$.

3. Пока $t$ не входит в $P$.

Начало цикла.

Среди всех ребер, начинающихся в $P$ и заканчивающихся вне $P$, найти ребро наименьшего веса. Пусть это ребро имеет вид $(v, w)$.

Добавить $w$ к $P$ и положить ПРЕДШЕСТВЕННИК $[w] := v$.

Конец цикла.

4. С помощью меток ПРЕДШЕСТВЕННИК построить $(s, t)$-цепь.

Приведите пример, когда этот алгоритм не находит кратчайший путь от $s$ до $t$.

19. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) В данном полном двудольном графе, в каждой из долей которого содержится $n$ вершин, требуется построить полное паросочетание минимального веса. Рассмотрим жадный алгоритм.

1. Начать с пустого паросочетания, т. е. $M := \varnothing$.

2. Сформировать из ребер ОЧЕРЕДЬ в порядке возрастания весов.

3. Пока $M$ содержит менее $n$ ребер.

Начало цикла.

Считать очередное ребро $e$ из ОЧЕРЕДЬ, удалить его из ОЧЕРЕДЬ.

Если $e$ не пересекается ни с одним ребром из $M$, то добавить его к $M$.

Конец цикла.

Приведите пример когда этот алгоритм не находит полное паросочетание минимального веса.

20. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Родители подарили дошкольнику Пете набор кубиков с буквами. На каждой из шести граней написана буква. Теперь Петя хочет похвастаться перед старшей сестрой, что научился читать. Для этого он хочет сложить из кубиков ее имя. Но это сделать не так просто – ведь разные буквы могут оказаться на одном и том же кубике, и тогда Петя не сможет использовать обе буквы в слове. Правда, одна и та же буква может встречаться на разных кубиках.

    Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм определения того, что из заданного набора кубиков можно составить заданное слово.

21. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Множество вершин графа $W$, такое, что каждое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из $W$, называется *вершинным покрытием*. Наименьшее по количеству вершин покрытие называется *оптимальным*.

    Рассмотрим следующий алгоритм построения вершинного покрытия.
    Вход: граф $G = (V, E)$.
    Выход: $C$ – вершинное покрытие.

    1. begin $C := \varnothing$; $F := E$;
    2.     while $(F \neq \varnothing)$ do
    3.         begin
    4.             $e = \{v; w\}$— произвольное ребро из $F$;
    5.             $C := C \cup \{v\} \cup \{w\}$;
    6.             Удалить из $F$ все ребра, содержащие $v$ или $w$;
    7.         end
    8. end

    Приведите пример графа, в котором данный алгоритм построит неоптимальное вершинное покрытие.

## 6.2. Решения

**Задача 1.** Построим неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, c)$. Множество вершин $V$ — острова; множество $E = \{\{v, w\}$: острова $v$ и $w$ соединены мостом или тоннелем$\}$; $c(v, w) = 0$, если острова $v$ и $w$ соединяются тоннелем, $c(v, w) = 1$, если мостом. Остается описать любой алгоритм построения минимального остова. Например, алгоритм Ярника – Прима – Дейкстры.

1. Считать $T$ пустым ($T$ — множество ребер остова), $F = \{v\}$, где $v$ — произвольная вершина.
2. До тех пор, пока $F$ не равно $V$.
3. Начало цикла.
4. Найти минимальное по весу ребро $\{v, w\}$, где $v$ входит в $F$, а $w$ – не входит. Добавить вершину $w$ к $F$, а ребро $\{v, w\}$ к $T$.
5. Конец цикла.

Возможно другое решение. Построить неориентированный граф, в котором вершины — острова, а ребра — тоннели. Найти любым поиском $k$ — количество компонент связности графа. Тогда ответом будет $k - 1$. Остается описать поиск в глубину или в ширину.

**Задача 2.** Набор типов монет: $\{5; 4; 3; 1\}$, требуемая сумма 7. Алгоритм выберет набор из трех монет: $\{5; 1; 1\}$, оптимальный набор состоит из двух монет: $\{4; 3\}$.

**Задача 3.** Построим ориентированный взвешенный граф $G = (V, E, c)$. Множество вершин $V$ — города; множество $E = \{(v, w)$: города $v$ и $w$ соединены дорогой$\}$; $c(v, w) = c(v)$, где $c(v)$ — стоимость бензина в городе $v$. В построенном графе требуется найти кратчайший путь от вершины $A$ до вершины $B$. Поскольку стоимости положительны, то можно использовать алгоритм Дейкстры. Опишем его.

На каждом шаге находить «расстояние» (т. е. стоимость пути) до очередной ближайшей к $A$ вершины. Пусть $d(v)$ — расстояние от вершины $A$ до вершины $v$, $v_k$ — $k$-я, ближайшая к $A$ вершина.

1. Считать $d(A)$ равным нулю, $v_0 = A$.
2. Пусть вершины $v_0, \ldots, v_k$ определены и расстояния $d(v_i)$, $i = 1, \ldots, k$ вычислены.
   Для каждой другой вершины $w$ положим $T(w) = min\{d(v_i) + c(v_i, w) : i = 0, 1, \ldots, k\}$.
   Выберем вершину $w$ с минимальным значением $T(w)$. Пусть $v_{k+1} = w$, $d(v_{k+1}) = T(w)$.
3. Выполнять шаг 2 до тех пор, пока не достигли вершины $B$.

**Задача 8.** Построим ориентированный взвешенный граф $G = (V, E, c)$. Множество вершин $V$ — валюты; множество $E = \{(v, w)$: валюта $v$ может быть конвертирована в валюту $w\}$; $c(v, w)$ = курс валюты $w$ по отношению к валюте $v$, т. е. количество единиц валюты $w$, которое будет получено при продаже одной единицы валюты $v$.

Для заданной пары валют $v$ и $w$ требуется найти наиболее выгодный вариант обмена. Математически это означает, что надо найти путь от вершины $v$ до вершины $w$ с максимальной стоимостью, где стоимость пути равна произведению стоимостей ребер (понятно, что на одну единицу стартовой валюты надо получить наибольшее количество конечной валюты). Эта задача сводится к задаче поиска кратчайшего пути в той же самой сети, но веса ребер считаются по другой формуле, а именно, $d(v, w) = -\log_2(v, w)$. Дальше нужно просто описать алгоритм Форда – Беллмана. Условие, что нельзя построить контур, меняя на каждом шаге валюту, выиграв при этом, означает, что в построенной сети нет контуров отрицательной длины.

Алгоритм Форда – Беллмана. Пусть $d_k(u)$ есть длина кратчайшего $(v, u)$-пути среди всех $(v, u)$-путей, содержащих не более

$k$ ребер. Последовательно, для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и всех вершин $u$, вычислять величину $d_k(u)$, используя формулы $d_1(u) = d(v, u)$ и $d_k(u) = min\{d_{k-1}(u), d_{k-1}(t) + d(t, u)\}$. Ответом является $d_{n-1}(w)$.

**Задача 13.** Пример. Цепь: 1 – 2 – 3 – 4 – 2 – 5 – 6 – 3 – 7. Алгоритм выдаст ответ 1 – 2 – 5 – 6 – 7, содержащий 4 ребра, в то время как правильный ответ: 1 – 2 – 3 – 7, итого 3 ребра.

**Задача 16.** Построим сеть $G = (V, E, c)$, где источник сети — это пункт $A$, а сток — пункт $B$. Множество вершин $V$ — узловые станции, где для каждой узловой станции $T_i$ заводим две вершины $i-$ и $i+$, между которыми есть ребро $(i-, i+)$, для пунктов $A$ и $B$ вводим по одной вершине $A+$ и $B-$. Если узловые станции $T_i$ и $T_j$ соединены железной дорогой, то считаем, что есть ребро $(i+, j-)$. Пропускные способности ребер полагаем $c(i-, i+) = K_i$, $c(i+, j-) = C_{ij}$. Остается в построенной сети найти максимальный поток $f$. Ответом к задаче является величина максимального потока.
Алгоритм Форда – Фалкерсона построения максимального потока.

1. Нулевой поток объявить текущим, т. е. $f = 0$ на каждом ребре.
2. Для текущего потока $f$ искать $A$-дополняющую $(s, t)$-цепь $p$.
3. Если такая цепь $p$ построена, то на каждом ребре $e$ из $p$ положить $f(e) = f(e) + h(p)$, если ребро $e$ прямое в $p$; $f(e) = f(e) - h(p)$, если $e$ — обратное, и на шаг 2.
4. Иначе. СТОП. Текущий поток $f$ — максимальный.

**Задача 20.** Построим двудольный неориентированный граф $V = (X, Y, E)$. Множество вершин доли $X$ — буквы имени старшей сестры, доли $Y$ — все имеющиеся кубики; считаем, что пара вершин $x$ и $y$ соединены ребром, если буква $x$ имеется на кубике $y$. Остается определить, есть ли в графе $X$ полное паросочетание, или найти наибольшее паросочетание и определить, сколько в нем ребер. Опишем простой алгоритм построения наибольшего паросочетания.

1. Пустое паросочетание объявить текущим, $M = 0$.
2. Искать $M$-чередующуюся цепь $p$.
3. Если такая цепь $p$ найдена, то положить $M = M + p$ и на шаг 2.
4. Иначе. СТОП. $M$ — наибольшее.
5. Если мощность $M$ равна мощности $X$, то ответ «Да», иначе «Нет».

Глава 7

# Основы баз данных

## 7.1. Примеры заданий

1. В базе данных имеются таблицы:

| Приход | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| № | Арт. | Партия | Кол-во | Цена ед. | Поставщик |
| 1 | 123 | 1 | 100 | 150 | Иванов А. И. |
| 2 | 125 | 2 | 200 | 200 | Сергеев П. Ф. |
| 3 | 132 | 3 | 700 | 52 | Миронова О. А. |
| 4 | 165 | 6 | 250 | 70 | Иванов А. И. |
| 5 | 132 | 7 | 500 | 50 | Сергеев П. Ф. |
| 6 | 125 | 4 | 300 | 210 | Миронова О. А. |
| 7 | 123 | 8 | 400 | 165 | Сергеев П. Ф. |
| 8 | 165 | 5 | 400 | 72 | Миронова О. А. |

| Товар | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Арт. | Название | Гарантия (дни) | Ед. измерения | Хар-ка |
| 123 | Монитор LG | 150 | дюйм | 17 |
| 125 | Монитор Aser | 100 | дюйм | 19 |
| 132 | HDD | 700 | гигабайт | 250 |
| 165 | HDD | 250 | гигабайт | 500 |

| Заказ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| № | Заказчик | Дата | Арт. | Кол-во | Цена (ед.) | Вып. |
| 100 | Колледж связи | 13.04.10 | 123 | 80 | 180 | |
| 101 | Шк. № 12 | 14.04.10 | 125 | 12 | 250 | |
| 102 | Техникум торговли | 15.04.10 | 132 | 25 | 60 | |
| 103 | Шк. № 130 | 16.04.10 | 125 | 25 | 240 | |
| 104 | Физфак УрГУ | 17.04.10 | 123 | 25 | 185 | |
| 105 | Техникум торговли | 18.04.10 | 165 | 500 | 90 | |
| 106 | Колледж связи | 19.04.10 | 132 | 50 | 65 | |
| 107 | Техникум торговли | 20.04.10 | 125 | 60 | 250 | |
| 108 | Колледж связи | 21.04.10 | 165 | 1000 | 80 | |
| 109 | Физфак УрГУ | 22.04.10 | 123 | 48 | 190 | |
| 110 | Шк. № 12 | 23.04.10 | 165 | 10 | 100 | |

(a) (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить в терминах SQL сценарий, показывающий варианты наличия товара этой заявки (задан номер) в соответствии с наличием товара в таблице «Приход» и ценой заказа (нельзя продать дешевле, чем купил).

(b) (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить функцию, отражающую количество заявок у заданного заказчика, и показать с помощью этой функции число заявок у Колледжа связи.

(c) (2011 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить функцию, отражающую количество поставок у заданного поставщика, и показать с помощью этой функции число поставок у Иванова А. И.

(d) (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить запрос, показывающий по заказчику: номера заказов, заказчик, товар, даты заказа, даты окончания гарантии. Привести пример работы.

(e) (2012 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить запрос, показывающий по товару: поставщика, товар, дату поставки и дату окончания гарантии. Привести пример работы.

2. (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Даны таблицы. Один заказ может включать несколько позиций, цена указана за 1 единицу товара.

| Заказано | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Код заказа | Товар | Цена | Кол-во | Скидка |
| 10248 | NuNuCa Nuss-Nougat-Creme | 140,00 р. | 23 | 3 % |
| 10248 | Chartreuse verte | 35,30 р. | 1 | 0 % |
| 10248 | Jack's New England Clam Chowder | 98,00 р. | 10 | 0 % |
| 10248 | Camembert Pierrot | 345,00 р. | 4 | 5 % |
| 10248 | Mishi Kobe Niku | 348,00 р. | 5 | 0 % |
| 10249 | Sir Rodney's Marmalade | 186,00 р. | 9 | 0 % |

В заказе указаны данные клиента, сотрудника, даты и доставка.

| Заказы | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Код | Клиент | Работник | Дата разм. | Дата исп. | Почта | Цена |
| 10248 | Wart Kurt | Игорь | 04.07.96 | 16.07.96 | EMS | 32,38 р. |
| 10249 | Toms Spez | Дима | 05.07.96 | 10.07.96 | KTT | 11,61 р. |
| 10250 | Hanari Cames | Настя | 08.07.96 | 12.07.96 | EMS | 65,83 р. |

Товары поступают на склад по оптовым ценам за упаковку.

| Товары | | | |
|---|---|---|---|
| Код товара | Марка | Единица измерения | Цена |
| 6 | Sir Rodney's Marmalade | 30 коробок | 3 645,00 р. |
| 11 | NuNuCa Nuss-Nougat-Creme | 20 банок по 450 г | 630,00 р. |
| 40 | Chartreuse verte | 750 мл бутылка | 810,00 р. |
| 41 | Boston Crab Meat | 24 банки по 125 г | 828,00 р. |
| 42 | Jack's New England Clam Chowder | 12 банок по 355 мл | 434,25 р. |
| 51 | Valkoinen suklaa | 12 банок по 100 г | 731,25 р. |
| 61 | Camembert Pierrot | 15 упаковок по 300 г | 1 540,00 р. |

(a) (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить запрос, вычисляющий стоимость заказа по всем товарам, вошедшим в заказ.

(b) (2013 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Построить запрос, вычисляющий по каждому сотруднику сумму оформленных заказов за период от даты исполнения $A$ до даты исполнения $B$.

3. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Даны реляционные отношения:

   **Сотрудники (код, ФИО, должность, подчиняется)**

   Атрибуты обладают свойствами:

   - код int primary key,
   - ФИО nvarchar(255),
   - должность nvarchar(100),
   - подчиняется int references Сотрудники(код).

   **Продажи (код, код товара, количество, цена, код сотрудника, дата)**

   Атрибуты обладают свойствами:

   - код int primary key,
   - код товара int references Товары(код),
   - количество int,
   - цена money,
   - код сотрудника int references Сотрудники(код),
   - дата date.

   Найти по каждому руководителю, на какую общую сумму были реализованы продажи в его коллективе в период от даты $A$ до даты $B$.

4. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Даны реляционные отношения:

   **Товары (код, название, остаток на складе, товарная группа)**

   Атрибуты обладают свойствами:

   - код int primary key,
   - название nvarchar(255),
   - остаток на складе int,
   - товарная группа int references Группы товаров(код).

   **Продажи (код, код товара, количество, цена, код сотрудника, дата)**

   Атрибуты обладают свойствами:

   - код int primary key,
   - код товара int references Товары(код),
   - количество int,
   - цена money,
   - код сотрудника int references Сотрудники(код),
   - дата date.

   Найти по каждой товарной группе, на какую общую сумму были реализованы продажи в период от даты $A$ до даты $B$.

5. (2015 — КН, ФИИТ, ПИ СЧ) Даны реляционные отношения:

   **Сотрудники (код, ФИО, должность, подчиняется)**

   Атрибуты обладают свойствами:

   - код int primary key,
   - ФИО nvarchar(255),
   - должность nvarchar(100),
   - подчиняется int references Сотрудники(код).

**Продажи (код, код товара, количество, цена, код сотрудника, дата)**

Атрибуты обладают свойствами:

- код int primary key,
- код товара int references Товары(код),
- количество int,
- цена money,
- код сотрудника int references Сотрудники(код),
- дата date.

Найти по каждому сотруднику, на какую общую сумму были реализованы продажи в период от даты $A$ до даты $B$.

## 7.2. Решения

**Задача 1.** (a) По номеру заявки @id выберем артикул товара с соответствующими ценами. Определим количество товара заданного артикула в таблице «Приход».

```
create function dbo.kol(@id int)
returns int
as
begin
declare @k int;
select @k=sum(a.количество)
from dbo.приход as a, dbo.заказ as b
where (a.артикул=b.артикул) and (a.[цена за
ед#]<=b.[цена#ед#заказа])
and (b.код=@id);
return(@k);
end;
```

```
/* проверка */
select dbo.kol(6)
650
```

Построим функцию, формирующую таблицу вариантов по номеру заявки и ее параметрам.

```
create function rez(@id int)
returns table
as
return(
select a.код as [номер в приходе], b.артикул, a.количество
as наличие,
a.[цена за ед#], b.код as [номер заявки],
b.количество as спрос, b.[цена#ед#заказа]
from dbo.приход as a, dbo.заказ as b
where (a.артикул=b.артикул) and (dbo.kol(@id)>=b.количество)
and (a.[цена за ед#]<=b.[цена#ед#заказа]) and (b.код=@id))
```

Покажем результат:

```
declare @i int
/* номер заявки */
declare @n int
/* всего заявок */
select @n=count(*) from dbo.приход
set @i=1
While @i<=@n
begin
select * from rez(@i)
set @i=@i+1
end
```

### Задача 3.

```
Select С.подчиняется, sum(Р.количество* Р.цена) result
From Сотрудники С inner join Продажи Р on С.код=Р.код
сотрудника
And (Р.дата between A and B) group by С.подчиняется
```

### Задача 4.

```
Select Т.товарная группа, sum(Р.количество* Р.цена) result
From Товары Т inner join Продажи Р on Т.код=Р.код товара
And (Р.дата between A and B)
group by Т.товарная группа
```

### Задача 5.

```
Select С.код, sum(Р.количество* Р.цена) result
From Сотрудники С inner join Продажи Р on С.код=Р.код
сотрудника
And (Р.дата between A and B) group by С.код
```

## Глава 8

## Теория функций комплексного переменного

### 8.1. Примеры заданий

1. (2012 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-1|=4}\frac{1-\cos z}{z\sin z}dz.$$

2. (2012 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-1|=6}\frac{e^z-1}{e^{iz}-1}dz.$$

3. (2013 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^5dz}{(z^4-9)(z+1)(z-3)}.$$

4. (2013 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^5dz}{(z^4-4)(z-1)(z+3)}.$$

5. (2013 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2\sin z}dz.$$

6. (2014 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{(e^z-1)dz}{z(z+1)^2}.$$

7. (2014 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{1-\cos 2z}{z^2(2+z)^2}dz.$$

8. (2014 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2}dz.$$

9. (2015 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^3 z}{(\cos z-2)\cos z}dz.$$

10. (2015 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z\cos 2z}{(\cos z-3)\cos z}dz.$$

11. (2015 — МТ СЧ) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z+\cos 2z}{(\cos z-\frac{3}{2})\cos z}dz.$$

## 8.2. Решения

**Теорема Коши (основная теорема о вычетах).** *Пусть $D$ – область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой $\Gamma$, функция $f$ непрерывна в замыкании $\overline{D}$ области $D$ и является аналитической в этой области всюду, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

**Теорема Коши (о полной сумме вычетов).** *Если функция $f$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

*где $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$ – вычет относительно бесконечно удаленной точки.*

**Задача 1.** Для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=4} \frac{1-\cos z}{z \sin z}\,dz$$

применим основную теорему о вычетах. В случае нашего интеграла область $D$ — круг радиуса 4 с центром в точке $z = 1$, $\Gamma$ — окружность $|z-1| = 4$. Для подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z \sin z}$$

особыми точками являются нули знаменателя $z \sin z$, т. е. точки $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутри области $D$ лежат две из этих точек $z_0 = 0$ и $z_1 = \pi$.

Так как

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z\sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+o(z^3)\right)}{z(z+o(z^2))} = \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{z^2}{2}+o(z^3)}{z^2+o(z^3)} = \frac{1}{2},$$

то можно утверждать, что $z_0 = 0$ — устранимая особая точка. Следовательно, согласно теореме Коши,

$$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{1-\cos z}{z\sin z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\pi} \frac{1-\cos z}{z\sin z}.$$

Найдем вычет функции $f$ относительно точки $z_1 = \pi$. Для этого определим вначале тип этой особой точки. Запишем:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z\sin z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

$$\varphi(z) = \frac{1-\cos z}{z}, \quad \psi(z) = \sin z.$$

Так как

$$\varphi(\pi) = \frac{2}{\pi} \neq 0, \quad \psi(\pi) = 0,$$

а $\psi'(\pi) = \cos\pi = -1 \neq 0$, то можно утверждать, что $z_1 = \pi$ – полюс первого порядка. В этом случае вычет функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = \left.\frac{\left(\dfrac{1-\cos z}{z}\right)}{\cos z}\right|_{z=\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{1-\cos z}{z\sin z}\,dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -4i,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=4} \frac{1-\cos z}{z \sin z}\, dz = -\frac{4i}{2\pi i} = -\frac{2}{\pi}.$$

**Ответ:** $-\dfrac{2}{\pi}$.

**Задача 3.** Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^5 dz}{(z^4-9)(z+1)(z-3)}$$

применим основную теорему о вычетах. В данном случае область $D$ есть круг радиуса 2 с центром в точке $z = 0$, $\Gamma$ — окружность $|z| = 2$. Для функции

$$f(z) = \frac{z^5\, dz}{(z^4-9)(z+1)(z-3)}$$

в комплексной плоскости особыми точками являются корни уравнения $(z^4-9)(z+1)(z-3) = 0$, т. е. четыре корня уравнения $z^4 = 9$, обозначим их $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, а также корни $z_5 = -1$ и $z_6 = 3$. Хорошо видно, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{3}$. Следовательно, особые точки $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z_5$ лежат внутри области $D$, а точка $z_6 = 3$ — вне ее. Таким образом,

$$\int\limits_{|z|} \frac{z^5 dz}{(z^4-9)(z+1)(z-3)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Согласно теореме о полной сумме вычетов,

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_6} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=z_6} f(z) - \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Найдем два последних вычета. Точка $z_6 = 3$ — полюс первого порядка, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=z_6} f(z) = \lim_{z\to z_6}(z-z_6)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z^5}{(z^4-9)(z+1)(z-3)}$$

$$= \lim_{z\to 3}\frac{z^5}{(z^4-9)(z+1)} = \frac{3^5}{(3^4-9)(3+1)} = \frac{243}{72\cdot 4} = \frac{27}{32}.$$

Теперь рассмотрим

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z^6}{(z^4-9)(z+1)(z-3)} = 1.$$

Следовательно, в окрестности точки $z=\infty$ функция $f$ представима в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \ldots,$$

т. е. $C_{-1}=1$. Известно, что $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$, значит, в нашем случае $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=z_6} f(z) - \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{27}{32}+1 = \frac{5}{32}.$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^5\,dz}{(z^4-9)(z+1)(z-3)} = 2\pi i\cdot\frac{5}{32} = \frac{5\pi i}{16}.$$

**Ответ**: $\dfrac{5\pi i}{16}$.

**Задача 5.** Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2\sin z}\,dz$$

применим основную теорему о вычетах. В случае нашего интеграла область $D$ есть круг радиуса 1 с центром в точке $z = 0$, $\Gamma$ — окружность $|z| = 1$. Особыми точками подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 \sin z}$ являются корни уравнения $z^2 \sin z = 0$, т. е. точки $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутри области $D$ лежит единственная точка $z_0 = 0$. Исследуем характер особенности функции в этой точке. Имеем:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 \sin z} = \frac{1 + z + o(z) - 1}{z^2(z + o(z^2))} = \frac{1 + o(1)}{z^2(1 + o(z))}.$$

Таким образом, в окрестности точки $z_0 = 0$ функция $f$ представима в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\left(\dfrac{1 + o(1)}{1 + o(z)}\right)}{z^2},$$

где $\psi(z) = z^2$, $\varphi(0) = 1$. Следовательно, $z_0 = 0$ — полюс второго порядка. Вычет в этом полюсе определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \cdot f(z)\right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2(e^z - 1)}{z^2 \sin z}\right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z - 1}{\sin z}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z \sin z - (e^z - 1)\cos z}{\sin^2 z}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби в окрестности точки $z = 0$ допускают представление

$$e^z \sin z - (e^z - 1)\cos z$$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)\right)(z + o(z^2))$$

$$- \left(z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3)\right) = \frac{z^2}{2} + o(z^2),$$

$$\sin^2 z = (z + o(z^2))^2 = z^2(1 + o(z))^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{z^2}{2} + o(z^2)}{z^2(1+o(z))^2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^2 \sin z}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \pi i.$$

**Ответ:** $\pi i$.

**Задача 8.** Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2}\, dz$$

применим основную теорему о вычетах. В данном случае область $D$ есть круг радиуса 2 с центром в точке $z = 0$, $\Gamma$ — окружность $|z| = 2$. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ имеет в комплексной плоскости лишь одну особую точку $z = 0$, и эта точка лежит внутри области. Исследуем эту точку. Функцию $f$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{где} \quad \varphi(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad \psi(z) = z.$$

Поскольку $\lim\limits_{z\to 0} \varphi(z) = 1$, то $z = 0$ — полюс первого порядка функции $f$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Окончательно имеем:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i.$$

**Ответ:** $2\pi i$.

**Задача 9.** Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^3 z}{(\cos z - 2)\cos z}\, dz$$

применим основную теорему о вычетах. В случае нашего интеграла область $D$ — круг радиуса 1 с центром в точке $z = i$, $\Gamma$ — окружность $|z-i| = 1$. Особыми точками подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{\sin^3 z}{(\cos z - 2)\cos z}$$

являются корни уравнения $\cos z - 2 = 0$ и корни уравнения $\cos z = 0$.

Решим уравнение $\cos z = 2$, учитывая, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

и вводя обозначение $e^{iz} = t$. Имеем уравнение

$$\frac{t + \dfrac{1}{t}}{2} = 2,$$

или $t^2 - 4t + 1 = 0$. Это уравнение имеет два решения: $t = 2 \pm \sqrt{3}$. Таким образом, приходим к двум уравнениям $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$ и $e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$, решая которые, получаем:

$$iz = Ln(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$iz = Ln(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 - \sqrt{3}) + 2m\pi i, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно имеем:

$$z = 2k\pi + \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{i} = 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = 2m\pi + \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{i}$$

$$= 2m\pi - i\ln(2-\sqrt{3}) = 2m\pi + i\ln(2+\sqrt{3}), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Внутри нашей области лежит только точка $z_0 = i\ln(2+\sqrt{3})$.

Корнями уравнения $\cos z = 0$ являются точки $w_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Все эти точки лежат вне области, так как все находятся на вещественной оси и отличны от точки 0.

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^3 z}{(\cos z - 2)\cos z}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Найдем $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$. Для этого представим функцию $f$ в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{где} \quad \varphi(z) = \frac{\sin^3 z}{\cos z}, \quad \psi(z) = \cos z - 2.$$

Учитывая, что $\sin^2 z_0 + \cos^2 z_0 = 1$, а $\cos z_0 = 2$, получаем, что $\sin^2 z_0 = -3$, т. е. $\sin z_0 \neq 0$ и, следовательно, $\varphi(z_0) \neq 0$. С другой стороны, $\psi'(z_0) = -\sin z_0 \neq 0$. Это означает, что $z_0 = i\ln(2+\sqrt{3})$ — полюс первого порядка, и потому вычет определяется по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \frac{\sin^3 z_0}{\cos z_0(-\sin z_0)} = \frac{\cos^2 z_0 - 1}{\cos z_0} = \frac{3}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^3 z}{(\cos z - 2)\cos z}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 3\pi i.$$

**Ответ:** $3\pi i$.

# Глава 9
# Уравнения математической физики

## 9.1. Примеры заданий

1. (2012 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin\frac{x}{2},\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,\,x) = 0, \\ u(t,\,0) = 0, \\ u_x(t,\,\pi) = 0. \end{cases}$$

2. (2012 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos\frac{x}{2},\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,\,x) = 0, \\ u_x(t,\,0) = 0, \\ u(t,\,\pi) = 0. \end{cases}$$

3. (2013 — МТ СЧ) Решить краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0,\,x) = 1 - x^2, \\ u(t,\,0) = 1, \\ u_x(t,\,1) = -2. \end{cases}$$

4. (2013 — МТ СЧ) Решить краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0,\,x) = x^2 + x, \\ u_x(t,\,0) = 1, \\ u(t,\,1) = 2. \end{cases}$$

5. (2013 — МТ СЧ) Решить краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0,\, x) = 1 - x^2, \\ u(t,\, 0) = 1, \\ u_x(t,\, 1) = -2. \end{cases}$$

6. (2014 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4\sin 2x,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,\, x) = 0, \\ u(t,\, 0) = u(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

7. (2014 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 9\sin 3x,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,\, x) = 0, \\ u(t,\, 0) = u(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

8. (2014 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 16\sin 4x,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,\, x) = 0, \\ u(t,\, 0) = u(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

9. (2014 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,\, x) = 1,\ u_t(0,\, x) = \frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2},\ 0 < x, \\ u_x(t,\, 0) = 0,\ u(t,\, \pi) = 1,\ t > 0. \end{cases}$$

10. (2015 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1, \ t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u(0,\, x) = \pi, \\ u_x(t,\, 0) = 0, \\ u_x(t,\, \pi) = 0. \end{cases}$$

11. (2015 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \sin x, \ t > 0, \ 0 < x < 2\pi, \\ u(0,\, x) = 0, \\ u(t,\, 0) = 0, \\ u(t,\, 2\pi) = 0. \end{cases}$$

12. (2015 — МТ СЧ) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,\, x) = \sin x, \ u_t(0,\, x) = \sin 2x, \\ u(t,\, 0) = 0, \ u(t,\, \pi) = 0. \end{cases}$$

## 9.2. Решения

**Задача 1.** Ищем собственные функции как решение соответствующей задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} x_k''(x) = -\lambda_k^2 x_k(x), \\ x_k(0) = x_k'(\Pi) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\lambda_k = \frac{1}{2} + k, \ x_k(x) = \sin(\frac{1}{2} + k)x, \ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$

Решение задачи ищем в виде ряда по собственным функциям: $u(t,\, x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_k(t) x_k(x)$. Неоднородность в уравнении

$f(x) = \sin\frac{x}{2}$ также представляем в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_k(x), \quad f_k = \begin{cases} 1,\ k = 0, \\ 0,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Подставляем в уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x_k''(x) + f(x),$$

$$\sum_k u_k x_k = \sum_k (-\lambda_k^2) u_k x_k + \sum_k f_k x_k.$$

Задача для коэффициентов ряда $u$:

$$\begin{cases} u_k = -\lambda_k^2 u_k + f_k, \\ u_k(0) = 0. \end{cases}$$

При $k \in \mathbb{N}$ решение тривиально: $u_k(t) \equiv 0$.
При $k = 0$

$$\begin{cases} u_0(t) = -\frac{1}{4} u_0(t) + 1, \\ u_0(0) = 0, \end{cases}$$

$u_0(t) = Ae^{-\frac{t}{4}} + 4$ — общее решение. Далее,

$$u_0(0) = A + 4 = 0 \Rightarrow A = -4.$$

Итого:

$$u_0(t) = 4(1 - e^{-\frac{t}{4}}).$$

**Ответ:** $u(t,\, x) = 4(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \sin\frac{x}{2}$.

# Глава 10
# Методы вычислений

## 10.1. Примеры заданий

1. (2012 — МТ СЧ)

   (a) Записать метод Якоби приближенного решения системы
   $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 &= -3, \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2. \end{cases}$$

   (b) Выполнить две итерации, взяв в качестве начального приближения нулевой вектор.

   (c) Выяснить, сходится ли метод.

2. (2012 — МТ СЧ)

   (a) Записать метод Якоби приближенного решения системы
   $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ 8x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -4, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 10. \end{cases}$$

   (b) Выполнить две итерации, взяв в качестве начального приближения нулевой вектор.

   (c) Выяснить, сходится ли метод.

3. (2013 — МТ СЧ)

   (a) Построить интерполяционную квадратурную формулу для интеграла с весом
   $$\int_0^4 \sqrt{x} f(x)dx, \quad \text{если} \quad x_0 = 0,\ x_1 = 4.$$

(b) Определить алгебраическую степень точности формулы.

(c) Найти погрешность формулы.

4. (2013 — МТ СЧ)

   (a) Построить интерполяционную квадратурную формулу для интеграла с весом

   $$\int_0^1 \sqrt[4]{x} f(x) dx, \quad \text{если} \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

   (b) Определить алгебраическую степень точности формулы.

   (c) Найти погрешность формулы.

5. (2013 — МТ СЧ)

   (a) Построить интерполяционную квадратурную формулу для интеграла с весом

   $$\int_0^4 \sqrt{x} f(x) dx, \quad \text{если} \quad x_0 = 2{,}4.$$

   (b) Определить алгебраическую степень точности формулы.

   (c) Найти погрешность формулы.

6. (2014 — МТ СЧ)

   (a) Найти отрезок $[n,\ n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, на котором уравнение $0{,}5x^3 - 0{,}25x^2 - 0{,}5x - 5 = 0$ имеет корень, обозначим его $\xi$.

   (b) Доказать единственность корня на этом отрезке.

   (c) Выбрав нужный конец отрезка в качестве начального приближения $x_0$, выполнить одну итерацию методом Ньютона (методом касательных).

(d) Указать порядок метода.
(e) Оценить погрешность $|x_1 - \xi|$.
(f) Оценить погрешность $|x_n - \xi|$.

7. (2014 — МТ СЧ)

   (a) Найти отрезок $[n,\ n{+}1]$, $n \in \mathbb{Z}$, на котором уравнение $x^3 + 1{,}5x^2 + 24{,}5 = 0$ имеет корень, обозначим его $\xi$.
   (b) Доказать единственность корня на этом отрезке.
   (c) Выбрав нужный конец отрезка в качестве начального приближения $x_0$, выполнить одну итерацию методом Ньютона (методом касательных).
   (d) Указать порядок метода.
   (e) Оценить погрешность $|x_1 - \xi|$.
   (f) Оценить погрешность $|x_n - \xi|$.

8. (2014 — МТ СЧ)

   (a) Найти отрезок $[n,\ n{+}1]$, $n \in \mathbb{Z}$, на котором уравнение $0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 4{,}9 = 0$ имеет корень, обозначим его $\xi$.
   (b) Доказать единственность корня на этом отрезке.
   (c) Выбрав нужный конец отрезка в качестве начального приближения $x_0$, выполнить одну итерацию методом Ньютона (методом касательных).
   (d) Указать порядок метода.
   (e) Оценить погрешность $|x_1 - \xi|$.
   (f) Оценить погрешность $|x_n - \xi|$.

9. (2014 — МТ СЧ)

   (a) Найти отрезок $[n,\ n{+}1]$, $n \in \mathbb{Z}$, на котором уравнение $x^3 + 0{,}5x^2 - x + 10 = 0$ имеет корень, обозначим его $\xi$.
   (b) Доказать единственность корня на этом отрезке.

(c) Выбрав нужный конец отрезка в качестве начального приближения $x_0$, выполнить одну итерацию методом Ньютона (методом касательных).

(d) Указать порядок метода.

(e) Оценить погрешность $|x_1 - \xi|$.

(f) Оценить погрешность $|x_n - \xi|$.

10. (2015 — МТ СЧ) Какой шаг численного интегрирования следует взять в составной формуле трапеций, чтобы вычислить интеграл
$$\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$$
с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$?

11. (2015 — МТ СЧ) Построить квадратурную формулу
$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1),$$
имеющую максимальную алгебраическую степень точности.

12. (2015 — МТ СЧ) Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами при $p(x) = x^2$, $[a, b] = [0, 1]$.

## 10.2. Решения

### Задача 6.

1. Находим точки экстремума функции $f(x) = 0{,}5x^3 - 0{,}25x^2 - 0{,}5x - 5$: точка максимума $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ и точка минимума $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
   Поскольку $f(\frac{1-\sqrt{13}}{6}) < 0$, то уравнение имеет единственный корень $\xi$ и он больше $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$. Далее,
   $f(2) = 4 - 1 - 1 - 5 = -3, \quad f(3) = \frac{27}{2} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 5 = \frac{19}{4}.$
   Искомый отрезок: $[2,\ 3]$.

2. Имеем $f'(x) = 1{,}5x^2 - 0{,}5x - 0{,}5$, $f''(x) = 3x - 0{,}5$. На отрезке $[2,\, 3]$ $f''(x)$ положительна, значит $f'(x)$ возрастает от 4,5 и, следовательно, тоже положительна. Поэтому $f(x)$ возрастает и, следовательно, имеет один корень.

3. Имеем $f(3) \cdot f''(3) > 0$, поэтому

$$x_0 = 3, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{19 \cdot 2}{4 \cdot 23} \approx 2{,}586.$$

4. Порядок метода равен 2.

5. $|x_1 - \xi| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}|x_0 - \xi|^2 \leqslant \frac{17 \cdot 2}{4 \cdot 9} = \frac{17}{18}$.

6. $|x_n - \xi| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}|x_{n-1} - \xi|^2 \leqslant (\frac{M_2}{2m_1})^3|x_{n-2} - \xi|^4 \leqslant \ldots$
   $\leqslant (\frac{M_2}{2m_1})^{2^n - 1}|x_0 - \xi|^{2^n} \leqslant (\frac{17}{18})^{2^n - 1}$.

# Г л а в а 11
# Математика и механика

## 11.1. Примеры заданий

1. (2013 — МХ СЧ) Уравнения Лагранжа второго рода. Первые интегралы.

2. (2013 — МХ СЧ) Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости для установившихся движений.

3. (2013 — МХ СЧ) Найти общее решение дифференциального уравнения

   $$y'' + \omega^2 y = \alpha sin\beta t$$

   при различных значениях параметров $\omega$ и $\beta$.

4. (2013 — МХ СЧ) Канонические уравнения Гамильтона. Первые интегралы.

5. (2013 — МХ СЧ) Теорема Четаева о неустойчивости.

6. (2013 — МХ СЧ) Найти общее решение дифференциального уравнения

   $$y'' + py' + qy = 0$$

   при различных значениях параметров $p$ и $q$. В плоскости этих параметров изобразить множества, для которых общее решение имеет заданный вид.

7. (2014 — МХ СЧ) Сложное (составное) движение точки. Теорема Кориолиса.

8. (2014 — МХ СЧ) Принцип возможных перемещений Даламбера. Общее уравнение динамики системы.

9. (2014 — МХ СЧ) Шарик, подвешенный на нити, описывает окружность в горизонтальной плоскости, образуя конический маятник. Найти высоту конуса, если шарик совершает 20 оборотов в минуту.

10. (2014 — МХ СЧ) Призма массы  может скользить без трения по горизонтальной плоскости; поперечным сечением призмы является прямоугольный треугольник $ABD$ с острым углом $\alpha$. На призме находится материальная точка  массой $m$, скатывающаяся вниз так, что расстояние $AE$, равное $S$, изменяется по закону $S = \frac{1}{2}at^2$. Определить скорость движения призмы, если в начальный момент вся система находилась в покое.

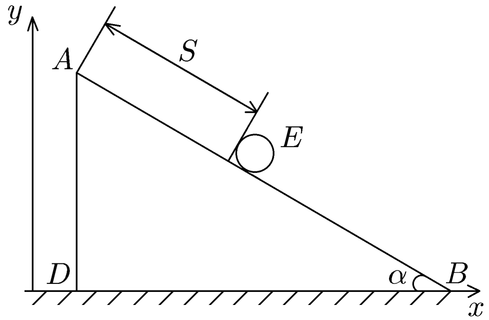


Рис. 11.1. Схема к задаче 10

11. (2014 — МХ СЧ) Скорости точек абсолютно твердого тела при плоско-параллельном движении.

12. (2015 — МХ СЧ) Свободные колебания точки при наличии кулонова трения.

13. (2015 — МХ СЧ) Принцип возможных перемещений.

14. (2015 — МХ СЧ) Материальная точка массы $m$ движется по гладкой горизонтальной плоскости $Oxy$ под

действием силы $\overrightarrow{F}(t)$, направленной параллельно оси $Ox$. Модуль силы изменяется по закону $F = bt^2$, где $b = const > 0$. Начальная скорость $\overrightarrow{V_0}$ направлена под углом $\alpha < \frac{\pi}{2}$ к линии действующей силы $\overrightarrow{F}(t)$. Найти уравнение траектории точки.

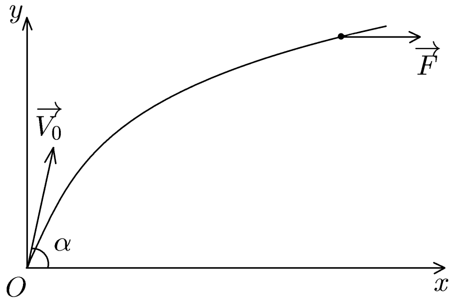


Рис. 11.2. Схема к задаче 14

15. (2015 — МХ СЧ) Два груза $A$ и $B$, имеющие массу $m$ и $2m$ соответственно, связаны между собой пружиной жесткости $c$ и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент грузы развели в стороны так, что пружина растянулась из свободного состояния на величину $\lambda$, и отпустили без начальной скорости. Определить скорость груза $A$ в тот момент, когда деформация пружины станет равной нулю.

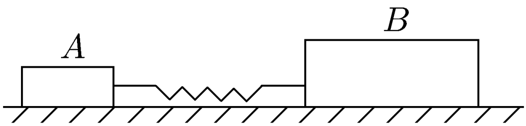


Рис. 11.3. Схема к задаче 15

## 11.2. Решения

**Задача 9.** Обозначим $OA = l$, $\angle BOA = \alpha$, $m$ — масса точки $A$, $\omega$ — угловая скорость вращения осевого сечения $OAB$ вокруг оси $OB$ в рад/с, $\overrightarrow{N}$ — натяжение нити $OA$, $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N}$ — равнодействующая сил, приложенных к точке $A$. Найдем проекции $\overrightarrow{F}$ на оси $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$:

$$F_\tau = 0, \quad F_n = N\sin\alpha, \quad F_b = mg - N\cos\alpha.$$

Тогда из уравнений движения в естественных осях следует, что

$$\begin{cases} m\frac{V^2}{p} = N\sin\alpha, \\ 0 = mg - N\cos\alpha, \end{cases}$$

где $p = l\sin\alpha$, $V = l\sin\alpha\omega$, $\omega = n\frac{\pi}{30}$ (рад/с) $= \frac{2\pi}{3}$ (рад/с). Поэтому $N\cos\alpha = mg$ и $ml\omega^2 = N$, откуда

$$OB = l\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9}{4\pi^2}g \approx 2{,}24 \text{ м}.$$

**Ответ:** $\frac{9}{4\pi^2}g \approx 2{,}24$ м.

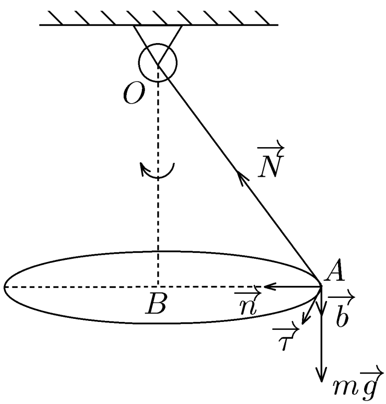


Рис. 11.4. Схема к решению задачи 9

**Задача 10.** Горизонтальные проекции всех трех внешних сил $M\overrightarrow{g}$, $m\overrightarrow{g}$ и $\overrightarrow{N}$, приложенных к системе, равны нулю. По теореме об изменении главного вектора количества движения системы имеем:

$$(M+m)[v_{cx}(t) - v_{cx}(0)] \;=\; \sum_{k=1}^{3}\int_0^t F_{kx}dt,\; F_{kx} = 0,\; k = 1,\,2,\,3,$$

$$V_{cx}(t) = v_{cx}(0), \quad v_{cx}(0) = 0,$$

где $v_{cx}$ — скорость центра масс системы. Поскольку

$$(M+m)v_{cx} \;=\; Mv_{Dx} + mv_{Ex},$$

$$v_{Ex} = v^a_{Ex} = v_{Dx} + \frac{dS}{dt}\cos\alpha,$$

то

$$Mv_{Dx} + m(v_{Dx} + at\cos\alpha) \;=\; 0, \quad v_{Dx} \;=\; -\frac{m}{M+m}at\cos\alpha.$$

**Ответ:** Скорость призмы направлена против оси $Ox$ и равна $\frac{m}{M+m}at\cos\alpha$.

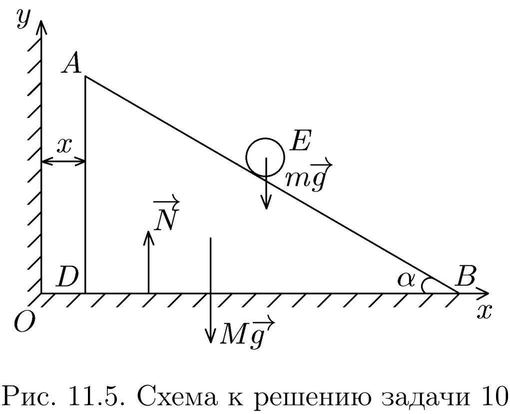


Рис. 11.5. Схема к решению задачи 10

**Задача 14.** Имеем

$$m\overrightarrow{w} \ = \ \overrightarrow{F}, \quad \overrightarrow{F} = (F(t), 0).$$

Далее,

$$\begin{cases} m\ddot{x} \ = \ F(t), \\ m\ddot{y} \ = \ 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m\dot{x}(t) - m\dot{x}(0) \ = \ \int\limits_0^t F(t)dt, \\ m\dot{y}(t) \ = \ const, \\ \dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha, \ \dot{y} = V_0 \sin\alpha, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) \ = \ V_0 \cos\alpha + b\frac{t^3}{3m}, \\ \dot{y}(t) \ = \ V_0 \sin\alpha, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) \ = \ x(0) + V_0 t \cos\alpha + b\frac{t^4}{12m}, \\ y(t) \ = \ V_0 t \sin\alpha, \ x(0) = 0, \ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ = \ V_0 t \cos\alpha + b\frac{t^4}{12m}, \\ y \ = \ V_0 t \sin\alpha, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t \ = \ \frac{y}{V_0 \sin\alpha}, \\ x \ = \ y \operatorname{ctg}\alpha + \frac{b}{12m}\frac{y^4}{V_0^4 (\sin\alpha)^4}. \end{cases}$$

**Ответ:** $x \ = \ y \operatorname{ctg}\alpha + \frac{b}{12m}\frac{y^4}{V_0^4 (\sin\alpha)^4}$.

*Учебное издание*

# МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

## Подготовка к вступительным экзаменам в магистратуру

### Задачник


| | |
|---|---|
| Заведующий редакцией | М. А. Овечкина |
| Редактор | А. А. Макарова |
| Корректор | А. А. Макарова |
| Компьютерная верстка | О. О. Коврижных |

Подписано в печать 28.09.2018. Формат $60 \times 84^1/16$.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,13.
Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 40 экз. Заказ 188

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

Для заметок

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2018

9785799624569